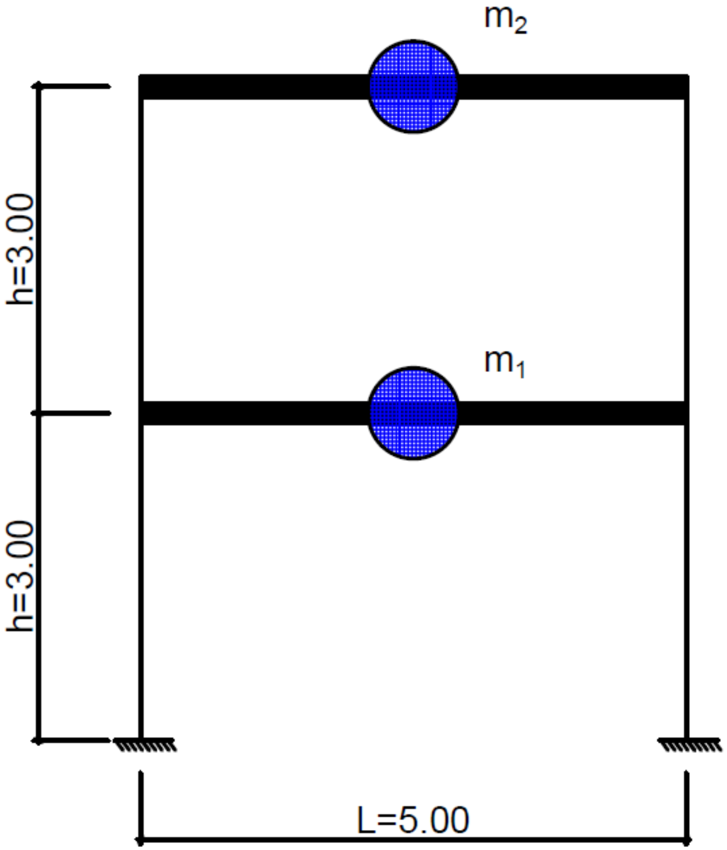
Analisi statica equivalente

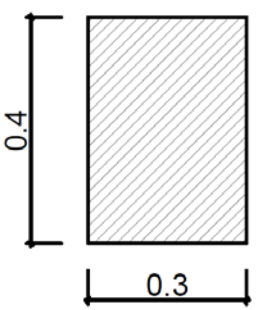


$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} ton$$

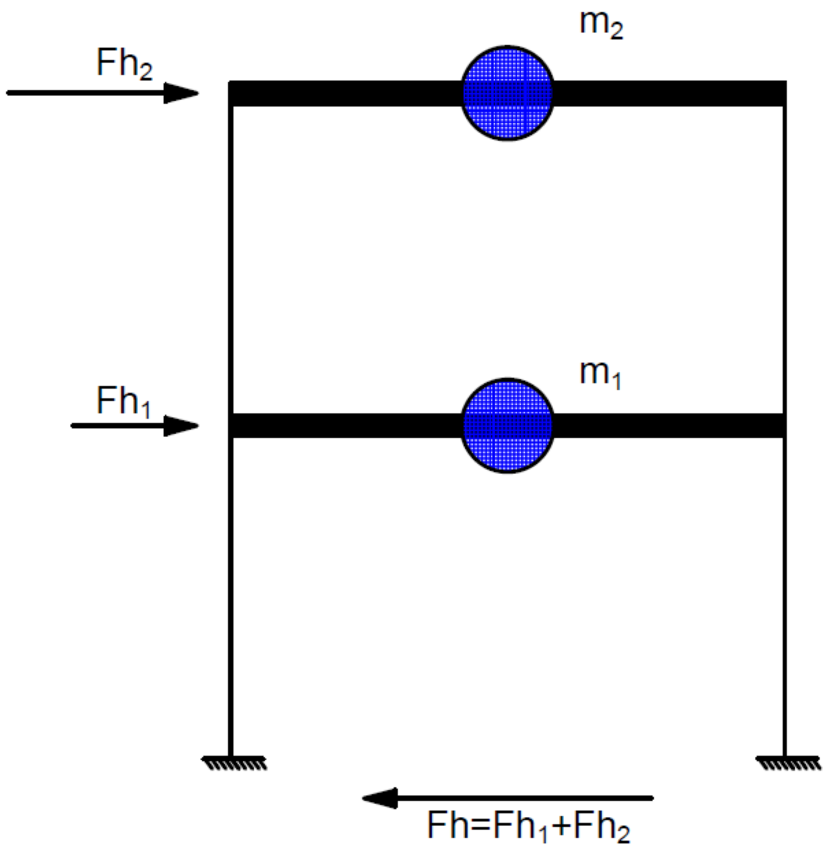
$$\begin{cases} B = 30cm \\ H = 40cm \end{cases} \rightarrow I = 1.6 \cdot 10^5 \; cm^4$$

$$E = 28000 \; Mpa$$

$$\begin{cases} h = 300cm \\ L = 500cm \end{cases}$$



Analisi statica equivalente



Matrice di massa

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} ton$$

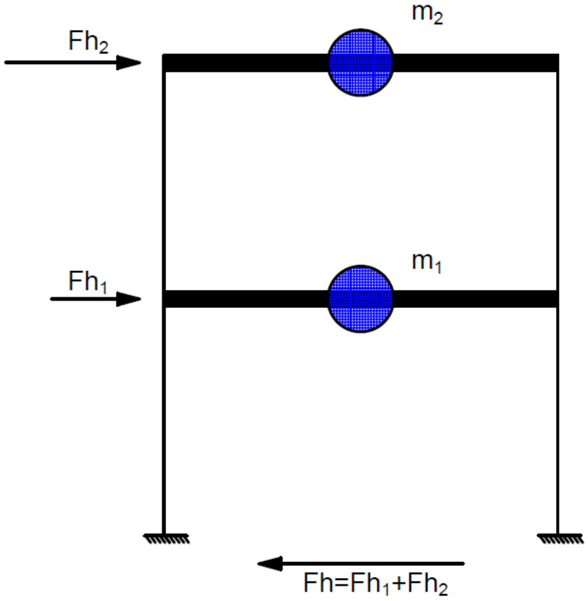
Stima del periodo del primo modo di vibrare

$$T_1 = C_1 H^{3/4} = 0.2875s$$

$$C_1 \begin{cases} 0.085 \; strutture\ a\ telaio\ in\ acciao \\ 0.075 \; strutture\ a\ telaio\ in\ c.a. \\ 0.05 \; altre\ tipologie\ strutturali \end{cases}$$

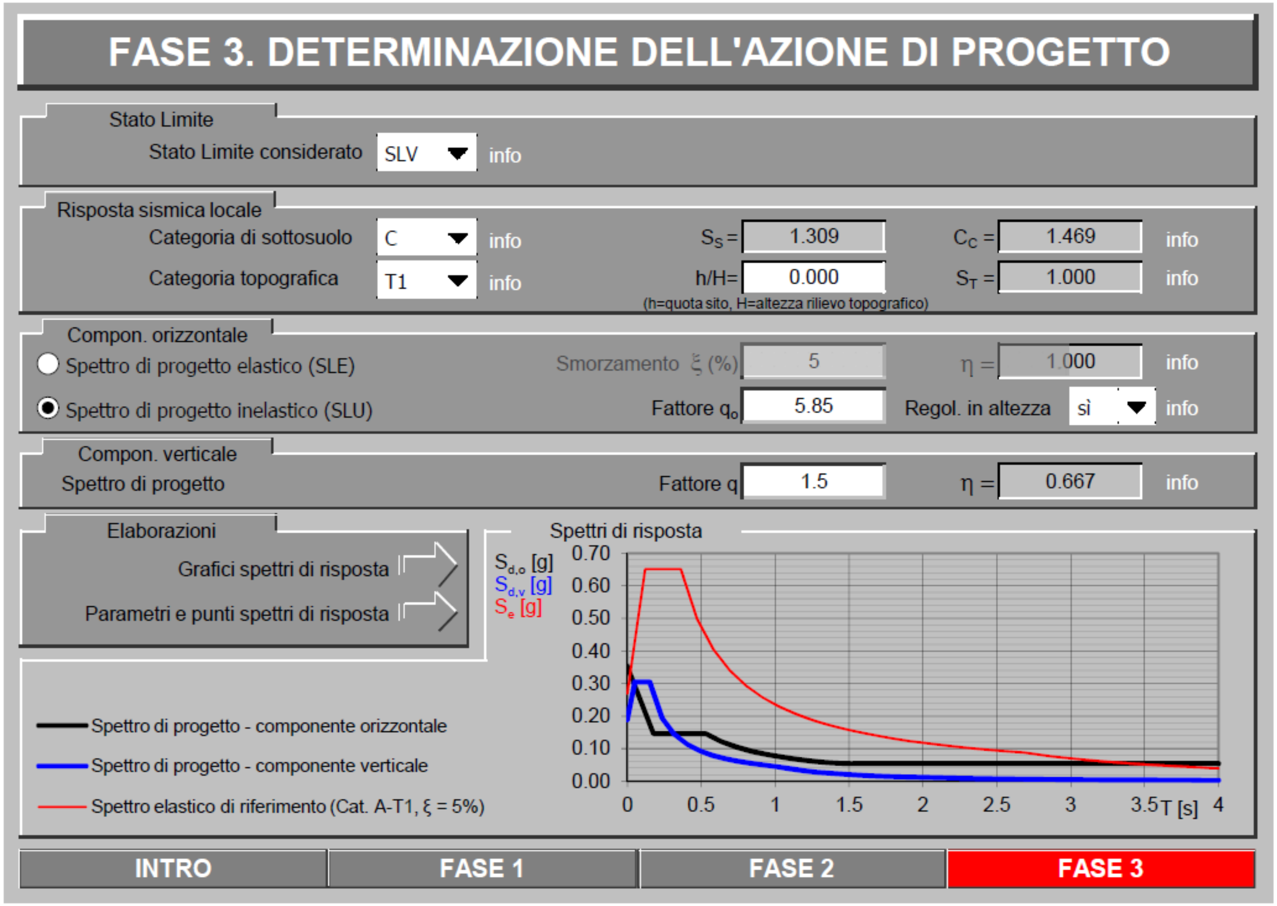
Analisi statica equivalente

$$F_{h,i} = F_h \frac{W_i z_i}{\sum_j W_j z_j} \qquad F_h = \lambda \frac{S_d(T_1)}{g} W$$



F_i	è la forza da applicare alla massa i-esima;
W_i e W_j	sono i pesi, rispettivamente, della massa i e della massa j;
z_i e z_j	sono le quote, rispetto al piano di fondazione (v. § 3.2.3.1), delle masse i e j;
$S_d(T_1)$	è l'ordinata dello spettro di risposta di progetto definito al § 3.2.3.5;
W	è il peso complessivo della costruzione;
λ	è un coefficiente pari a 0,85 se la costruzione ha almeno tre orizzontamenti e se $T_1 < 2T_C$, pari a 1,0 in tutti gli altri casi;
g	è l'accelerazione di gravità.

Spettro di progetto



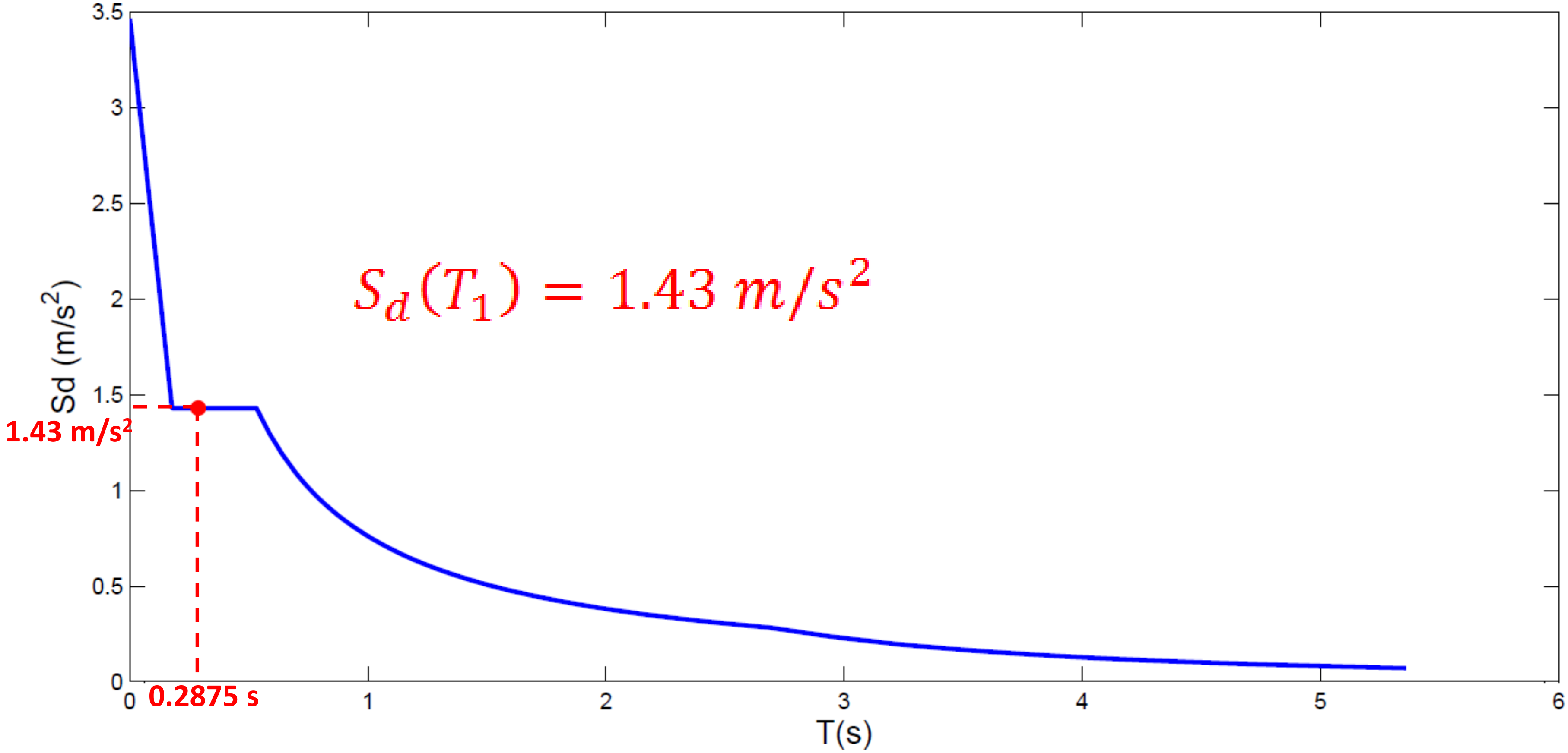
Parametri indipendenti

STATO LIMITE	
a_g	0.270 g
F_o	2.414
T_C^*	0.362 s
S_S	1.309
C_C	1.469
S_T	1.000
q	5.850

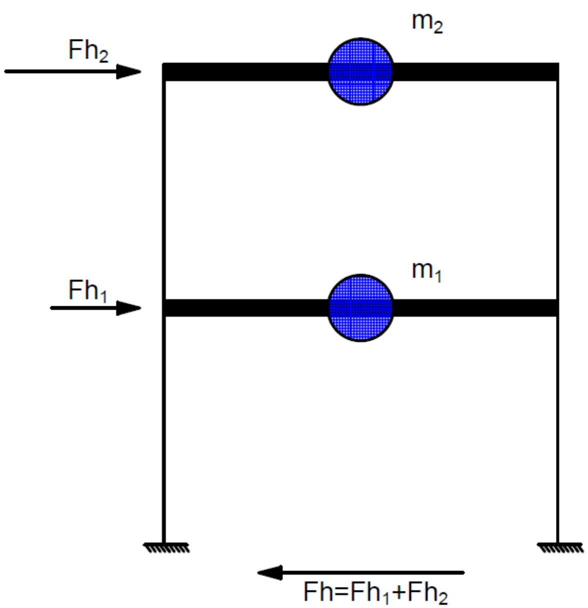
Parametri dipendenti

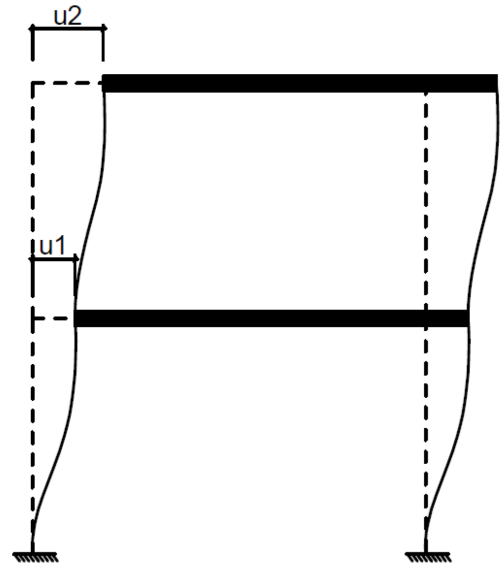
S	1.309
η	0.171
T_B	0.177 s
T_C	0.531 s
T_D	2.679 s

Spettro di progetto



Analisi statica equivalente





q	5.85
$T_1(s)$	0.2875
$T_C(s)$	0.531
μ_d	9.97

$$\boldsymbol{d_E} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.79 \\ 2.98 \end{bmatrix} cm$$

$$F_h = 71.5\ kN$$

$$F_{h,1} = 23.8\ kN$$

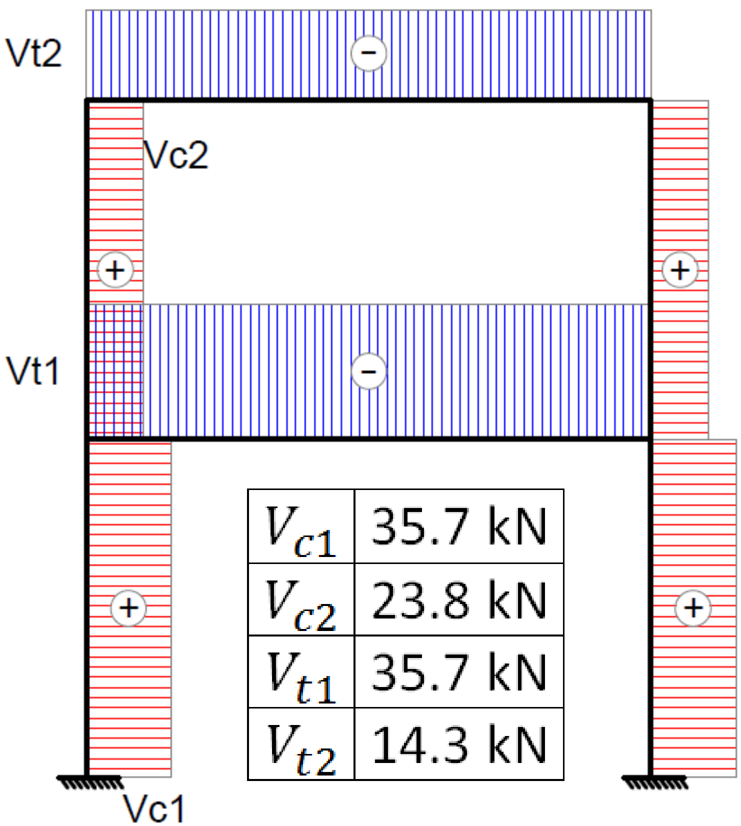
$$F_{h,2} = 47.7\ kN$$

$$d_E = \pm \mu_d \cdot d_{Ee}$$

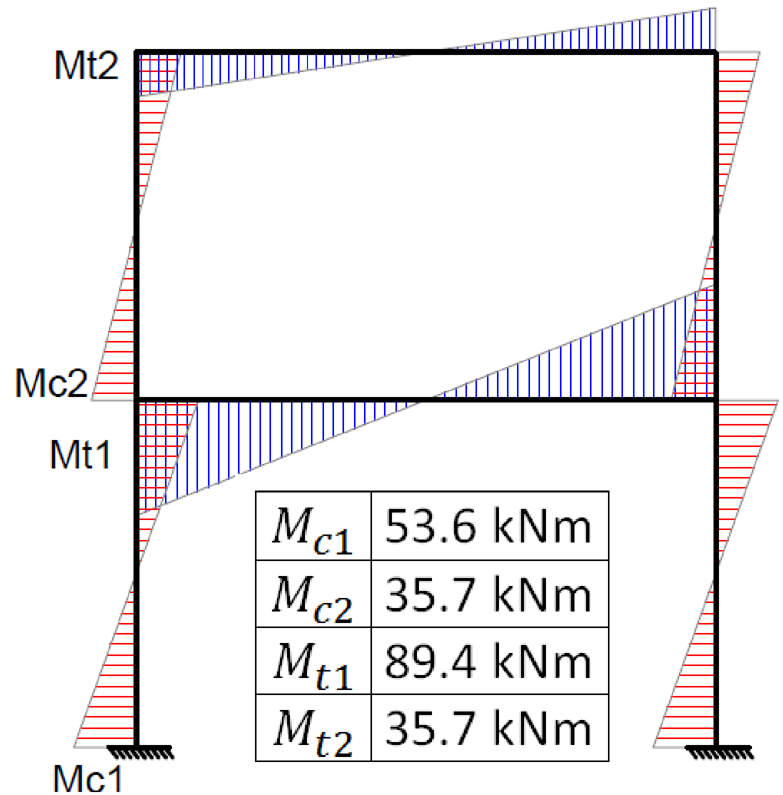
$$\mu_d = q \qquad \text{se} \quad T_1 \geq T_C$$

$$\mu_d = 1 + (q-1) \cdot T_C / T_1 \qquad \text{se} \quad T_1 < T_C$$

Analisi statica equivalente



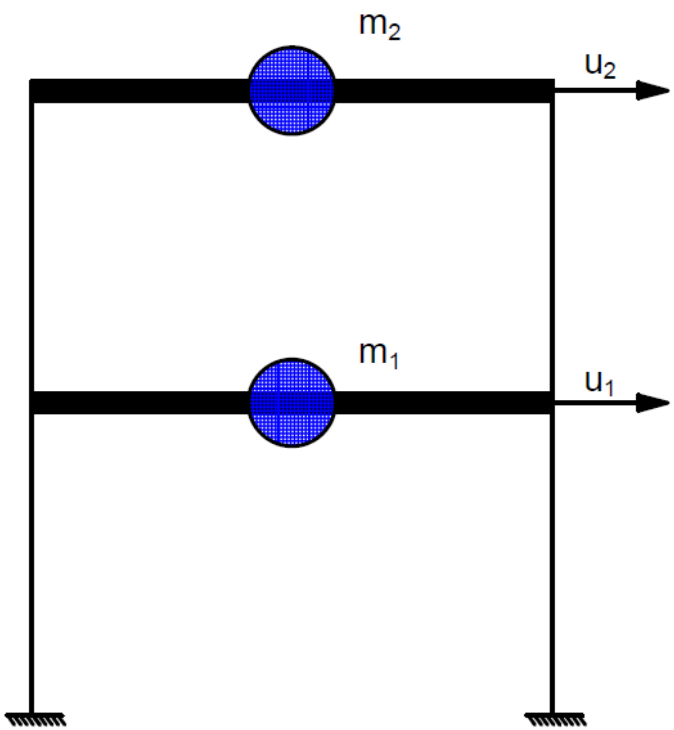
V_{c1}	35.7 kN
V_{c2}	23.8 kN
V_{t1}	35.7 kN
V_{t2}	14.3 kN

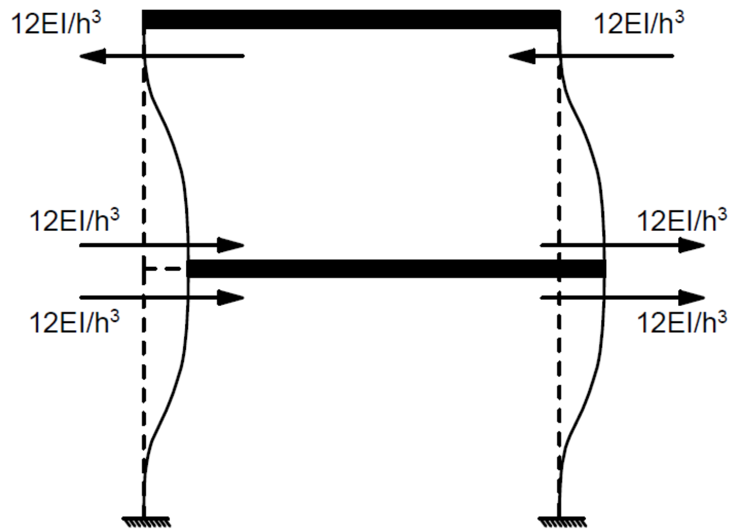


M_{c1}	53.6 kNm
M_{c2}	35.7 kNm
M_{t1}	89.4 kNm
M_{t2}	35.7 kNm

Analisi modale con spettro di risposta

Calcolo della matrice di rigidezza





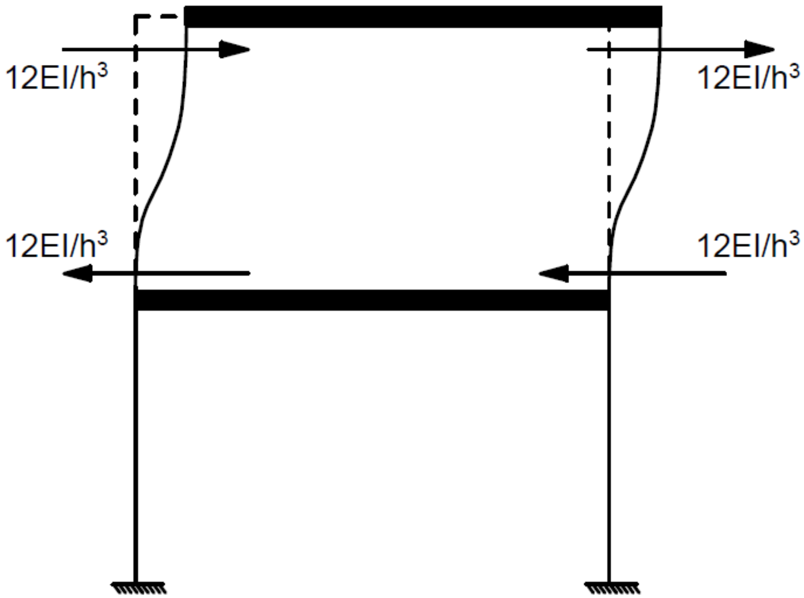
$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

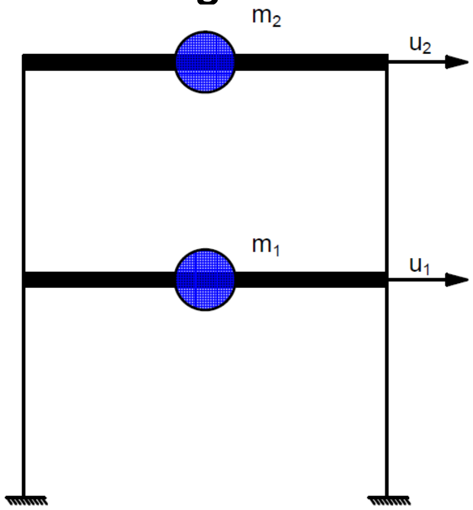
$$k_{11} = 4\left(\frac{12EI}{h^3}\right)$$

$$k_{21} = -2\left(\frac{12EI}{h^3}\right)$$

Analisi modale con spettro di risposta

Calcolo della matrice di rigidezza





$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} ton$$

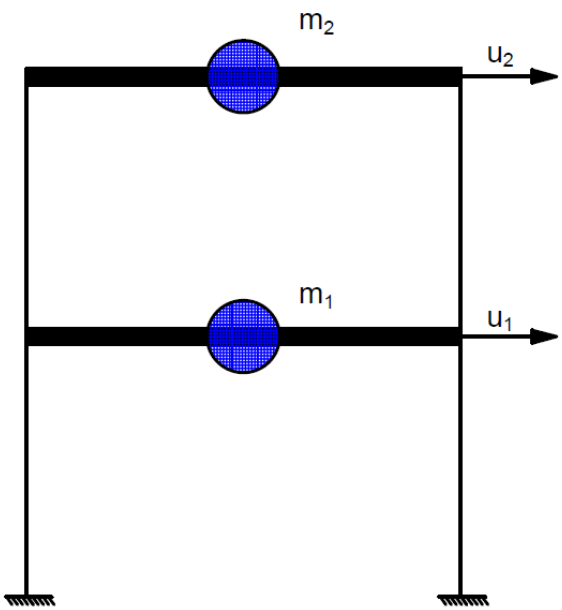
$$k_{12} = -2\left(\frac{12EI}{h^3}\right)$$

$$k_{22} = 2\left(\frac{12EI}{h^3}\right)$$

$$\boldsymbol{K} = \frac{12EI}{h^3}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cong 2 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

Analisi modale con spettro di risposta

Calcolo della proprietà modali: frequenze naturali e forme modali



Equazione differenziale del moto del sistema a 2gdl non smorzato in vibrazioni libere:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0} \qquad (1)$$

Soluzione dell'equazione differenziale in termini di spostamento ed accelerazioni:

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}\sin(\omega t + \varphi) \qquad \ddot{\boldsymbol{u}}(t) = -\omega^2\boldsymbol{u}\sin(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Sostituendo le (2) nella (1) si ottiene:

$$(-\boldsymbol{M}\omega^2 + \boldsymbol{K})\boldsymbol{u}\sin(\omega t + \varphi) = \boldsymbol{0} \qquad (3)$$

Le soluzioni non banali dell'equazione (3) si ottengono annullando il seguente determinante:

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{M}\omega^2) = 0 \qquad (4)$$

La (4) rappresenta un classico problema agli autovalori e autovettori che sono rispettivamente le frequenze naturali e le forme modali del sistema:

Analisi modale con spettro di risposta

Calcolo della proprietà modali: frequenze naturali e forme modali

Particolarizzando le equazioni precedenti per la struttura esaminata si ottiene:

$$\left|\frac{12EI}{h^3}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\right| = 0 \qquad k = \frac{12EI}{h^3};\, m_1 = m_2 = m$$

Infine si ottengono le due frequenze naturali del sistema e le relative forme modali:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{3 \pm \sqrt{5}}\,\sqrt{\frac{k}{m}} = \begin{cases}\omega_1 = 24.66\, rad/s\\ \omega_2 = 64.57\, rad/s\end{cases}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \begin{cases} f_1 = 3.92\, Hz\\ f_2 = 10.27 Hz\end{cases}$$

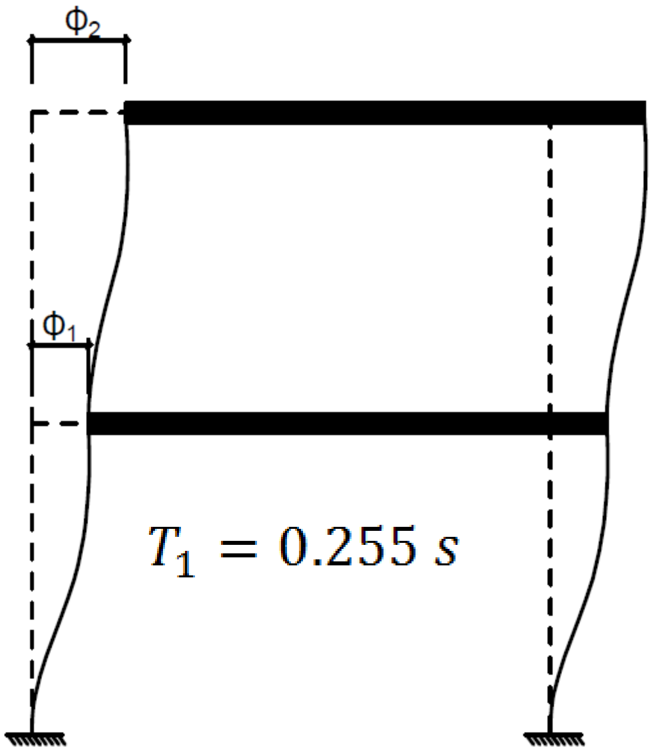
$$T = \frac{1}{f} = \begin{cases} T_1 = 0.255\, s\\ T_2 = 0.097\, s\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Phi_1} = \begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.62\\ 1\end{bmatrix}$$

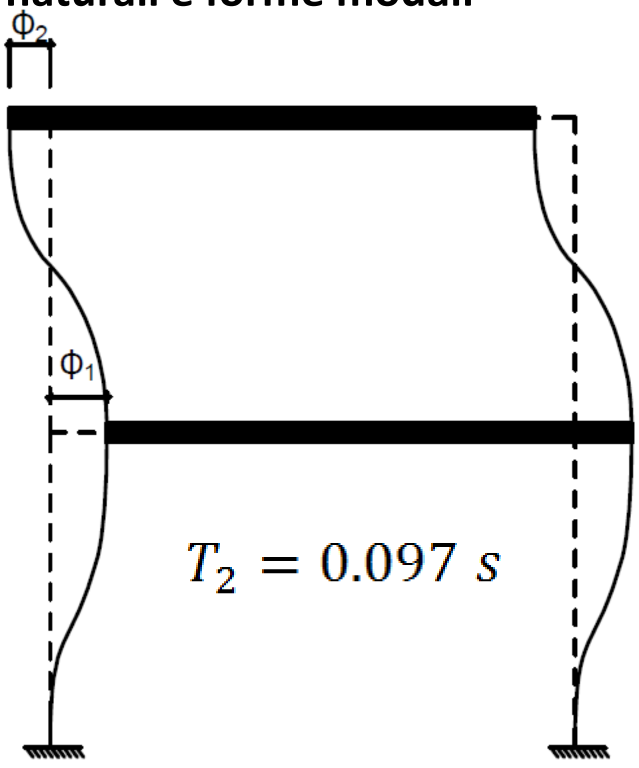
$$\boldsymbol{\Phi_2} = \begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -0.62\end{bmatrix}$$

Analisi modale con spettro di risposta

Calcolo della proprietà modali: frequenze naturali e forme modali



$$T_1 = 0.255\ s$$



$$T_2 = 0.097\ s$$

$$\mathbf{\Phi_1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi_2} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.62 \end{bmatrix}$$

Analisi modale con spettro di risposta

Fattori di partecipazione modale e masse modali partecipanti

Fattori di partecipazione modale:

$$\Gamma_1 = \frac{L_1}{M_1}; \quad \Gamma_2 = \frac{L_2}{M_2}$$

$$L_1 = \boldsymbol{\Phi}_1^t \boldsymbol{M} \boldsymbol{r}; \quad M_1 = \boldsymbol{\Phi}_1^t \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}_1$$

$$L_2 = \boldsymbol{\Phi}_2^t \boldsymbol{M} \boldsymbol{r}; \quad M_2 = \boldsymbol{\Phi}_2^t \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}_2$$

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = 1.17 \quad \Gamma_2 = 0.27$$

Masse modali partecipanti:

$$\begin{cases} M_{p1} = \dfrac{(L_1)^2}{M_1} = 47.4\ ton = \boxed{94.72\%} \\ M_{p2} = \dfrac{(L_2)^2}{M_2} = 2.6\ ton = \boxed{5.28\%} \end{cases}$$

$$M_{p1} + M_{p2} = M_{tot} = 50\ ton$$

Analisi modale con spettro di risposta

Calcolo delle forze statiche equivalenti

Le forze statiche equivalenti possono essere calcolate come segue:

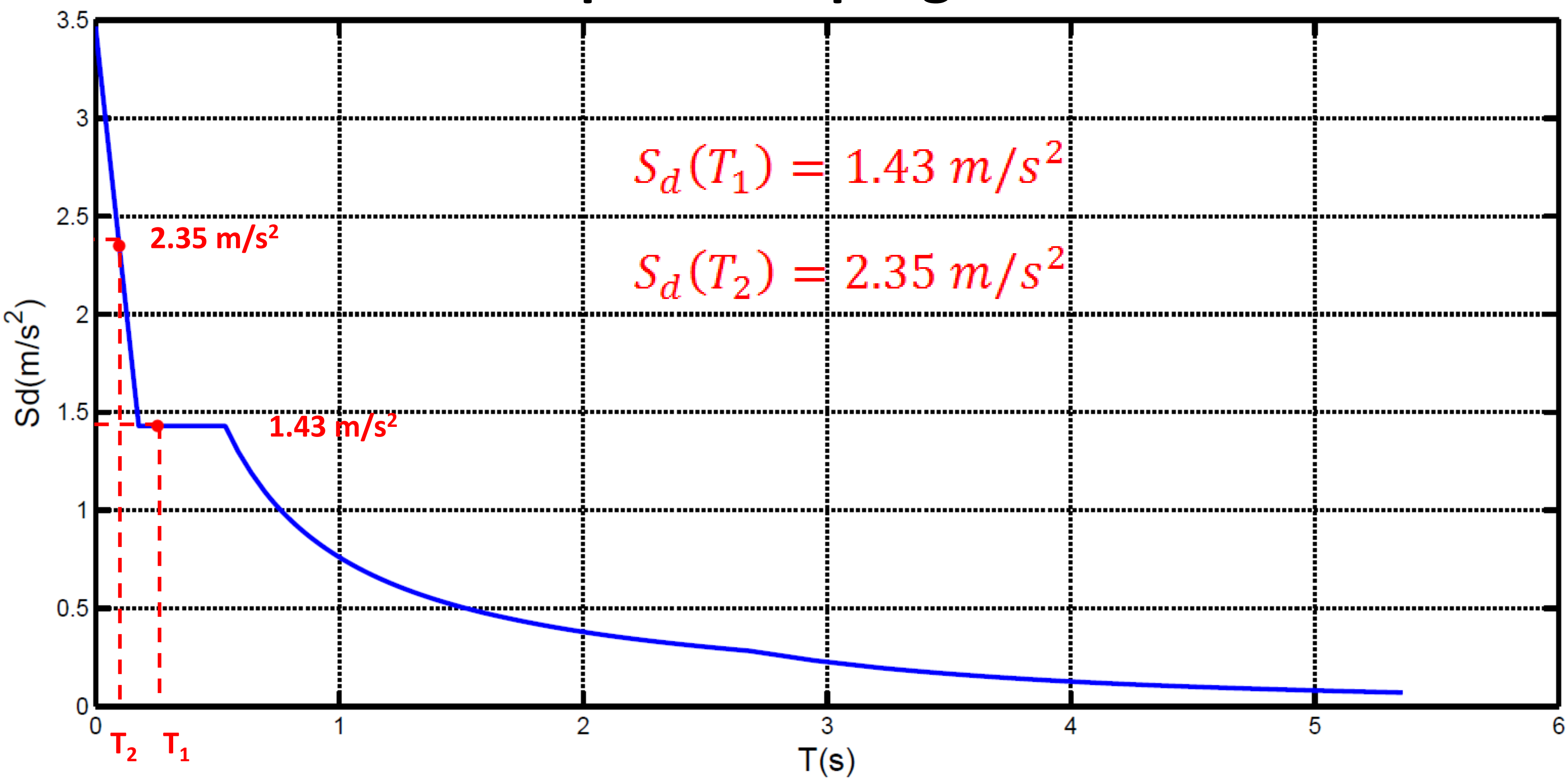
$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n,max}} = \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n}} S_d(T_n) = \begin{cases} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{1,max}} = \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{1}} S_d(T_1) \\ \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{2,max}} = \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{2}} S_d(T_2) \end{cases}$$

Dove:

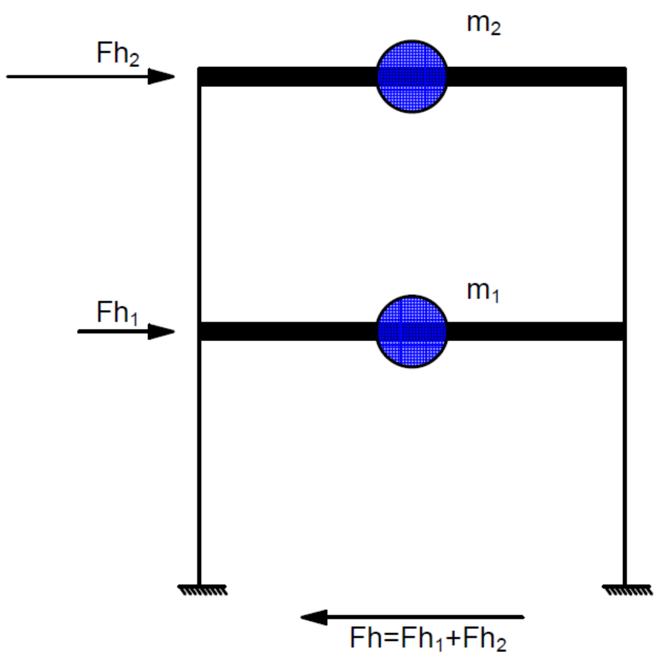
$$\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{1}} = \Gamma_1 \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{1}} = \begin{bmatrix} 18.09 \\ 29.27 \end{bmatrix} ton \qquad \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{2}} = \Gamma_2 \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{2}} = \begin{bmatrix} 6.90 \\ -4.27 \end{bmatrix} ton$$

Le accelerazioni spettrali relative al primo e secondo modo Sd(T1) e Sd(T2) possono essere calcolate attraverso lo spettro di progetto

Spettro di progetto



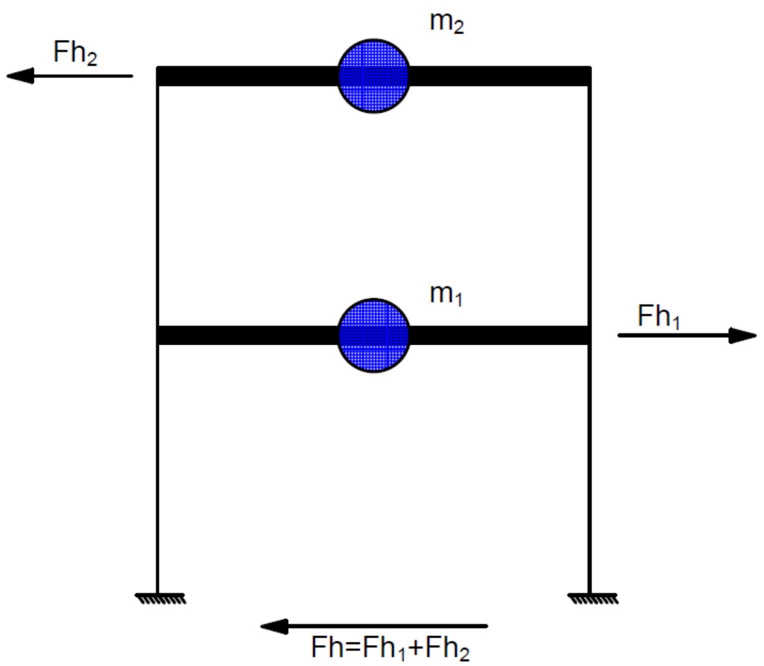
Modo 1



$$\boldsymbol{F_{h,1}} = \boldsymbol{s_1} S_d(T_1) = \begin{bmatrix} 25.88 \\ 41.86 \end{bmatrix} kN$$

$$\boldsymbol{F_h} = 25.88 + 41.86 = 67.74\ kN$$

Modo 2



$$\boldsymbol{F_{h,2}} = \boldsymbol{s_2} S_d(T_2) = \begin{bmatrix} 16.22 \\ -10.02 \end{bmatrix} kN$$

$$\boldsymbol{F_h} = 16.22 - 10.02 = 6.20\ kN$$

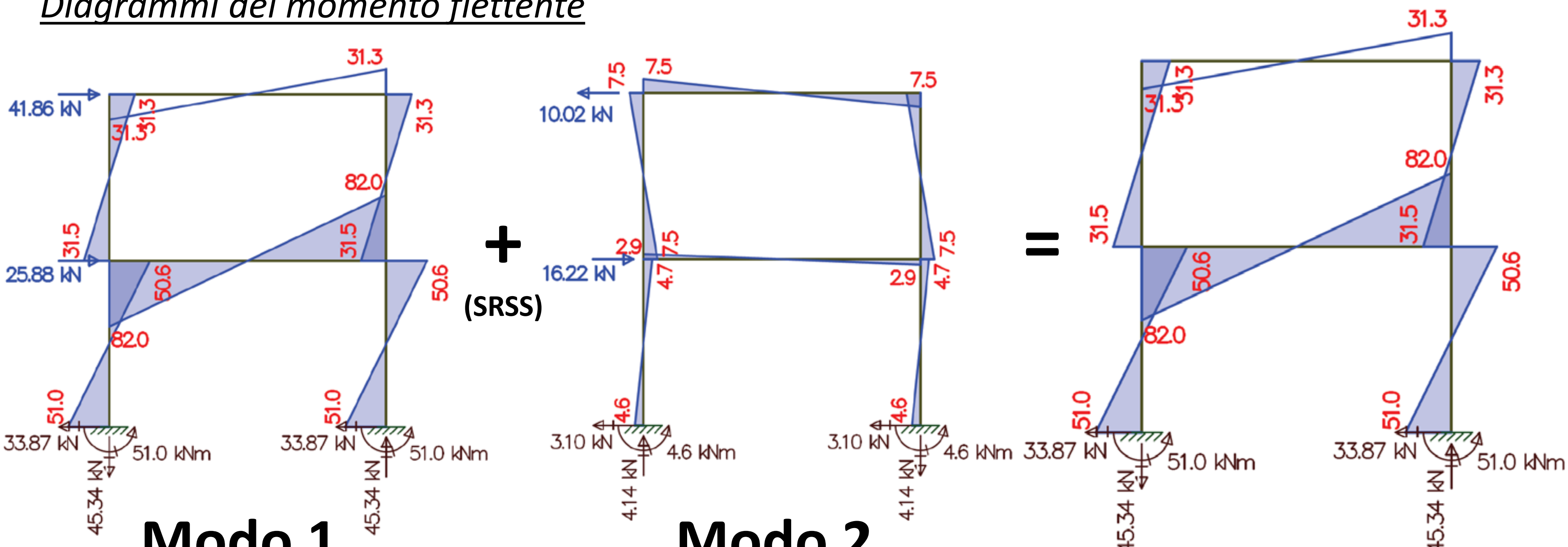
Combinazione modale SRSS (Square Root of Sum of Squares)

$$r_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r^2}$$

Taglio alla base SRSS (Modo1 +Modo2):

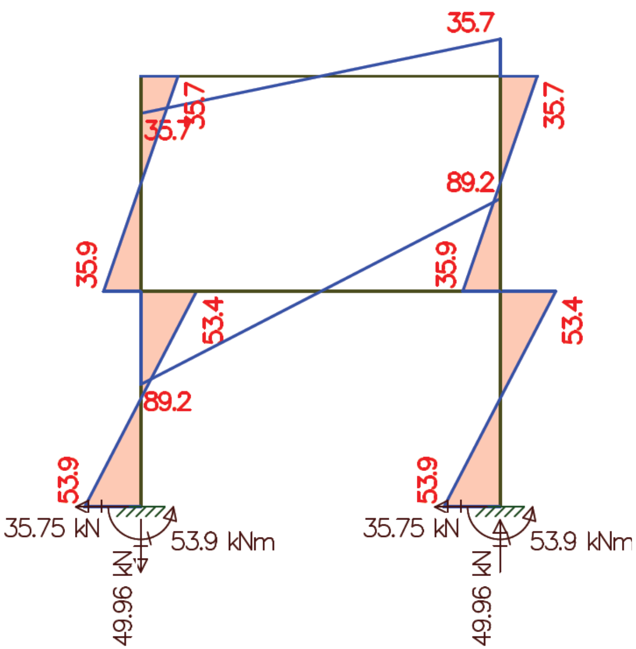
$$T_b = \sqrt{T_{b1}^2 + T_{b2}^2} = 68.01\ kN$$

Diagrammi del momento flettente



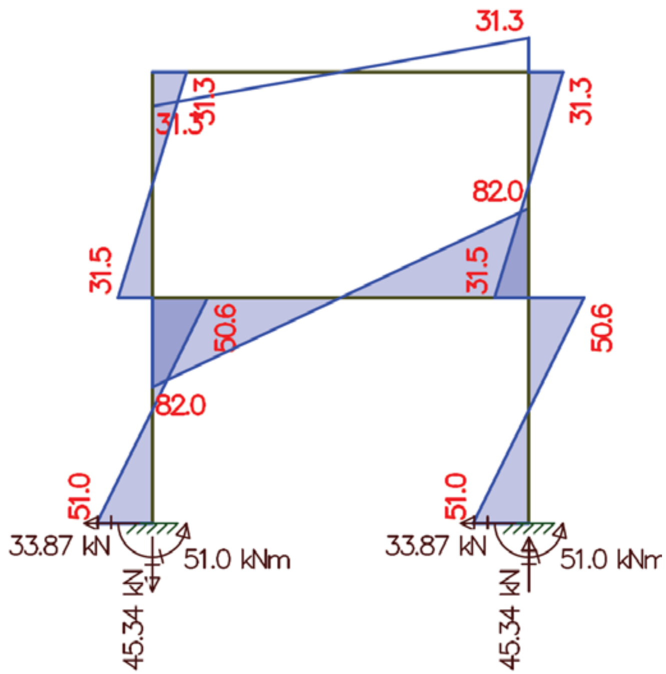
Modo 1 **Modo 2**

Confronto analisi statica lineare – analisi modale con spettro di risposta



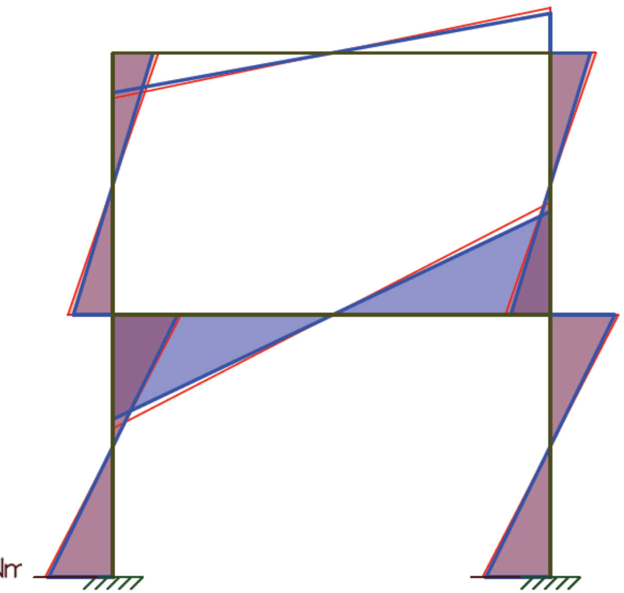
Analisi statica lineare

Momento flettente



Analisi modale

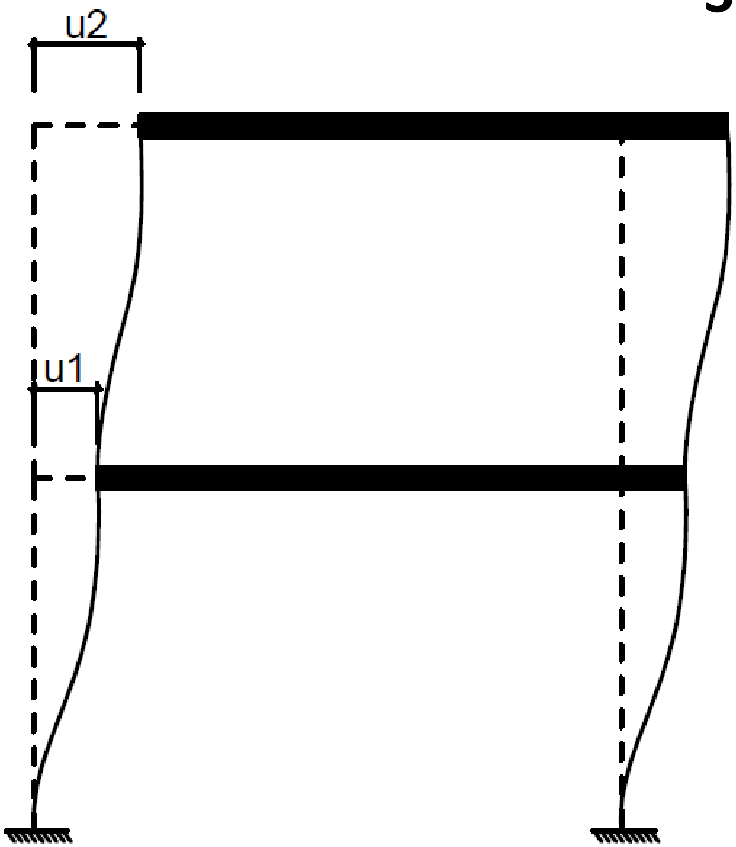
Momento flettente



Confronto

Momento flettente

Confronto analisi statica lineare – analisi modale con spettro di risposta
Spostamenti



Analisi statica lineare

$$\boldsymbol{d_E} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.79 \\ 2.98 \end{bmatrix} cm$$

Analisi modale

$$\boldsymbol{d_E} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.70 \\ 2.75 \end{bmatrix} cm$$