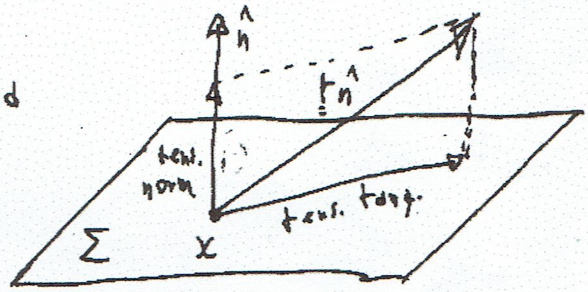
Dunque, se $\underline{\underline{t}}(x,t)$ è il tensore degli sforzi di Cauchy (nella posizione x all'istante t, $\underline{\underline{t}}\hat{n}$ misura la forza di contatto per unità di superficie nella posizione assunta da $\mathcal{C}$ all'istante t. Fissato (x,t), le tensioni principali λ e le direzioni principali m sono le coppie (autovalore, autovettore) del tensore simmetrico $\underline{\underline{t}}(x,t)$: $\underline{\underline{t}}\,\underline{m} = \lambda\,\underline{m}$. (1)

Scelta una superficie piana arbitraria Σ di normale $\hat{n}$ per x, la tensione $\underline{\underline{t}}\hat{n}$ si decompone nella



tensione normale

$$(\hat{n}\cdot\underline{\underline{t}}\hat{n})\,\hat{n} = (\hat{n}\otimes\hat{n})\,\underline{\underline{t}}\,\hat{n} \qquad (2)$$

e nella tensione tangenziale $(\underline{\underline{I}} - \hat{n}\otimes\hat{n})\,\underline{\underline{t}}\,\hat{n}$, (3)

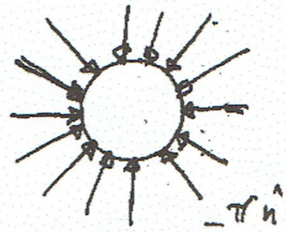
che rappresentano le proiezioni ortogonali di $\underline{\underline{t}}\hat{n}$ su $\hat{n}$ e Σ, rispettivamente.

Tre stati di tensione di particolare importanza e semplicità sono i seguenti.

i) Pressione uniforme : $\underline{\underline{T}} = -\pi \underline{\underline{I}}$, con $\pi(x,t) \in \mathbb{R}^+$. (4)

Allora $\underline{\underline{T}}\,\hat{n} = -\pi\,\hat{n}$, $\forall \hat{n}$ e dunque le tensioni principali sono tutte eguali a $-\pi$ (di molteplicità 3) con direzioni qualunque. La tensione normale è $-\pi\,\hat{n}$ e la tangenziale è ovviamente nulla: $(\underline{\underline{I}} - \hat{n}\otimes\hat{n})\,\underline{\underline{T}}\,\hat{n}$

$$= (\underline{\underline{I}} - \hat{n}\otimes\hat{n})(-\pi\hat{n}) = -\pi\,(\hat{n} - (\hat{n}\cdot\hat{n})\hat{n}) = \underline{0}\,.$$



L'equazione di Cauchy per la statica, in assenza di forze di massa ($\underline{b} \equiv \underline{0}$) è:

$$\underline{0} = \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{T}} = -\,\underline{\mathrm{div}}\,(\pi\underline{\underline{I}}) = -\,\nabla\pi \quad \text{in } \mathcal{C}, \qquad (5)$$

poiché $(\pi I)_{ij,j} = \pi_{,j}\,\delta_{ij} = \pi_{,i}$, $i=1,2,3$. La soluzione costante è il caso dei fluidi perfetti.

ii) Tensione semplice, di entità σ in direzione $\hat{e}$:

$$\underline{\underline{T}} = \sigma\,\hat{e}\otimes\hat{e}, \quad \text{con } \sigma(e) \in \mathbb{R}^+. \qquad (6)$$

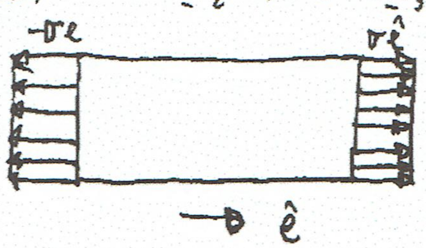
In una base $\mathcal{B} \equiv \{\hat{e}, \hat{f}, \hat{g}\}$, si ha $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le tensioni principali si ottengono dalla (1):

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{m} = \sigma(\hat{e}\otimes\hat{e})\,\underline{m} = \sigma(\hat{e}\cdot\underline{m})\,\hat{e} = \begin{cases} 0, & \text{se } \underline{m} = \hat{f} \text{ o } \underline{m} = \hat{g} \\ \sigma\,\hat{e}, & \text{se } \underline{m} = \hat{e} \end{cases} \qquad (7)$$

dunque: $\lambda_1 = \sigma$ con $\underline{m}_1 = \hat{e}$; $\lambda_i = 0$, $i=2,3$, con $\underline{m}_2 = \hat{f}$ e $\underline{m}_3 = \hat{g}$. (8)

La tensione normale sulla superficie di applicazione della tensione semplice è $\sigma\hat{e}$, tutte le altre nulle, come le tangenziali.



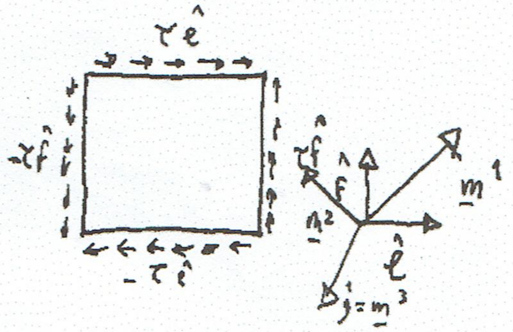
L'equazione della statica è $\frac{d\sigma}{de} = 0$ in $\mathcal{C}$, (9)

e dunque la tensione uniforme risolve il caso statico.

iii) Taglio semplice, di entità τ rispetto alle direzioni ortogonali $\hat{e}$ ed $\hat{f}$: scegliendo la base $\mathcal{B} \equiv \{\hat{e}, \hat{f}, \hat{g}\}$, si ha:

$$\underline{\underline{t}} = \tau \left(\hat{e} \otimes \hat{f} + \hat{f} \otimes \hat{e}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \tau(e,f) \in \mathbb{R}^+.$$

Si ha $0 = |\underline{\underline{t}} - \lambda \underline{\underline{I}}| = \begin{vmatrix} -\lambda & \tau & 0 \\ \tau & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - \tau^2)$ e quindi le tensioni principali sono $\lambda_1 = \tau$, $\lambda_2 = -\tau$, $\lambda_3 = 0$; mentre



$$\underline{\underline{t}}\,\underline{m} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau m_2 \\ \tau m_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Allora dalla (1) si ha: a) $\underline{\underline{t}}\,\underline{m}^1 = \lambda_1 \underline{m}^1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau m_2^1 \\ \tau m_1^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau m_1^1 \\ \tau m_2^1 \\ \tau m_3^1 \end{pmatrix}$ cioè

$m_1^1 = m_2^1$, $m_3^1 = 0$, dunque $\underline{m}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\hat{m}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\underline{\underline{t}}\,\underline{m}^2 = \lambda_2 \underline{m}^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau m_2^2 \\ \tau m_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau m_1^2 \\ -\tau m_2^2 \\ -\tau m_3^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{m}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{m}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\underline{\underline{t}}\,\underline{m}^3 = \lambda_3 \underline{m}^3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau m_2^3 \\ \tau m_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{m}^3 = \hat{g}$.

La tensione nelle direzioni della base è: 1) $\underline{\underline{t}}\hat{e} = \tau\hat{f}$ con tensione normale nulla e tangenziale $\tau\hat{f}$; 2) $\underline{\underline{t}}\hat{f} = \tau\hat{e}$, dunque normale nulla e tgz. $\tau\hat{e}$; 3) $\underline{\underline{t}}\hat{g} = 0$, dunque tutta nulla.

L'equazione della statica $\underline{0} = \operatorname{div}\underline{\underline{t}} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{\partial\tau}{\partial f} + 0 \\ \frac{\partial\tau}{\partial e} + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial\tau}{\partial f}\hat{e} + \frac{\partial\tau}{\partial e}\hat{f}$ ha come soluzione il taglio semplice costante.

$\underline{u} = u_i \hat{e}_i$ con $\underline{u} \cdot \hat{e}_j = (u_i \hat{e}_i) \cdot \hat{e}_j = u_i (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) = u_i \delta_{ij} = u_j$

$\underline{u} = \underline{t}_n = \underline{\underline{t}}\, \hat{n}$, $\hat{e}_j = \hat{n}$ $\Rightarrow \underline{u} \cdot \hat{e}_j = (\underline{\underline{t}}\hat{n} \cdot \hat{n}) = u_j$

Pb. 4.2 Calcolare la densità per: $v_i = \dfrac{x_i}{i+t}$, $i = 1, 2, 3$.

Sol. $0 = \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{v}$,

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2+t} + \frac{1}{3+t}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2+t} + \frac{1}{3+t} \right)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -dt \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2+t} + \frac{1}{3+t} \right)$$

$$\ln \rho = -\ln\left[(1+t)(2+t)(3+t)\right] + C$$

e

$$\rho = \frac{1}{(1+t)(2+t)(3+t)} \cdot e^C \quad , \quad \rho(0) = \frac{e^C}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Rightarrow e^C = 6\rho_0$$

$$\rho(t) = \frac{6\rho_0}{(1+t)(2+t)(3+t)}$$

Le figure geometriche, determinate dai punti di un corpo rigido in una posizione $\mathcal{C}$, sono dunque eguali a quelle determinate dagli stessi punti in un'altra posizione $\mathcal{C}'$. Anzi le due figure sono sovrapponibili, precisamente con l'operazione che fa passare il corpo rigido dalla posizione $\mathcal{C}$ alla posizione $\mathcal{C}'$.

In particolare, ad un segmento AB nella posizione $\mathcal{C}$ corrisponde un eguale segmento A'B' nella posizione $\mathcal{C}'$; ad un angolo $\widehat{ABC}$ nella posizione $\mathcal{C}$ corrisponde un eguale angolo $\widehat{A'B'C'}$ nella posizione $\mathcal{C}'$; ad un triangolo ABC nella posizione $\mathcal{C}$ corrisponde un eguale triangolo A'B'C' nella posizione $\mathcal{C}'$, ecc.

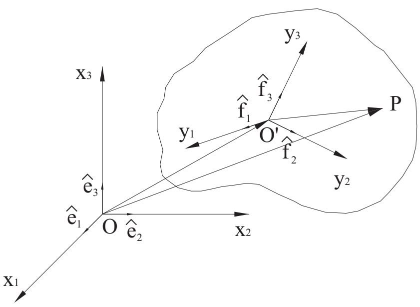
Definizione: Si dice ***corpo rigido*** un sistema materiale $\mathcal{C}$ tale che i suoi punti siano vincolati a mantenersi a distanza costante durante il moto del corpo, cioè tale che se P e $Q \in \mathcal{C}$, allora la distanza di P da Q in funzione del tempo è costante:

$$\left|PQ(t)\right| = \mathrm{cost}_{PQ}. \tag{4.4}$$

Il vincolo di corpo rigido è olonomo, bilaterale e fisso.

4.3.1. Velocità ed accelerazione nella cinematica rigida

Introducendo due terne destre, la prima $Ox_1x_2x_3$, di versori $\hat{e}_k$, $k = 1, 2, 3$, ***fissa***, e la seconda $O'y_1y_2y_3$, di versori $\hat{f}_k$, $k = 1, 2, 3$, ***solidale*** al corpo rigido $\mathcal{C}$, cioè una terna rispetto alla quale i punti del corpo mantengono una posizione costante nel tempo, studiamo il moto del generico punto $P \in \mathcal{C}$.



Vale l'equazione (geometrica) del moto di P:

$$\begin{aligned} OP(t) &= OO'(t) + O'P(t) = \\ &= c_1(t)\hat{e}_1 + c_2(t)\hat{e}_2 + c_3(t)\hat{e}_3 + y_1\hat{f}_1(t) + y_2\hat{f}_2(t) + y_3\hat{f}_3(t) \end{aligned} \tag{4.5}$$

dove le c_i, con $i = 1, 2, 3$, sono le componenti del vettore OO' ed y_i, con $i = 1, 2, 3$, sono le componenti costanti di P rispetto alla terna solidale $O'y_1y_2y_3$.

Derivando la (4.5) rispetto al tempo, si ottiene la velocità di P rispetto alla terna fissa:

$$\underline{v}_P = \frac{dOP}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3} c_i(t)\ \hat{e}_i + \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{3} y_k\hat{f}_k(t) = \sum_{i=1}^{3}\frac{dc_i}{dt}(t)\ \hat{e}_i + \sum_{k=1}^{3} y_k\frac{d\hat{f}_k}{dt}(t), \tag{4.6}$$

dove la prima sommatoria altro non è che la velocità dell'origine solidale O', $\underline{v}_{O'} = \dfrac{dOO'}{dt}$, mentre per studiare la seconda sommatoria introduciamo le seguenti formule:

<u>Formule di Poisson</u>: Esiste un vettore $\underline{\omega}$ tale che:

$$\frac{d\hat{f}_k}{dt} = \underline{\omega} \times \hat{f}_k,\ \forall k = 1,2,3; \tag{4.7}$$

tale vettore $\underline{\omega}$ è detto ***velocità angolare*** della terna solidale rispetto alla terna fissa ed ha la seguente espressione:

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\hat{f}_i \times \frac{d\hat{f}_i}{dt}$$

<u>Dimostrazione</u>: Per la proprietà (1.21) delle terne cartesiane, si ha che $\hat{f}_i \bullet \hat{f}_k = \delta_{ik}$ per $i,k = 1,2,3$, e quindi $\dfrac{d\hat{f}_i}{dt} \bullet \hat{f}_i = 0$ e $\dfrac{d\hat{f}_i}{dt} \bullet \hat{f}_k = -\hat{f}_i \bullet \dfrac{d\hat{f}_k}{dt}$ per $i,k = 1,2,3$. Da tali relazioni si ha dunque:

$$
\begin{aligned}
\underline{\omega}\times\hat{f}_k &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\hat{f}_i\times\frac{d\hat{f}_i}{dt}\right)\times\hat{f}_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\hat{f}_i\times\frac{d\hat{f}_i}{dt}\right)\times\hat{f}_k\right] = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\hat{f}_i\bullet\hat{f}_k\right)\frac{d\hat{f}_i}{dt}-\left(\frac{d\hat{f}_i}{dt}\bullet\hat{f}_k\right)\hat{f}_i\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{3}\delta_{ik}\frac{d\hat{f}_i}{dt}+\sum_{i=1}^{3}\left(\hat{f}_i\bullet\frac{d\hat{f}_k}{dt}\right)\hat{f}_i\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{d\hat{f}_k}{dt}+\frac{d\hat{f}_k}{dt}\right) = \frac{d\hat{f}_k}{dt}
\end{aligned}
$$

dove nella terza eguaglianza si è usata la formula (1.32) e nella penultima la definizione (1.21) del delta di Kronecker e la rappresentazione (1.24) di un vettore.

■

Quindi, applicando le formule di Poisson alla (4.6), otteniamo la seguente relazione:

$$
\underline{v}_P = \underline{v}_{O'} + \sum_{k=1}^{3} y_k\left(\underline{\omega}\times\hat{f}_k\right) = \underline{v}_{O'} + \sum_{k=1}^{3}\left[\underline{\omega}\times y_k\hat{f}_k(t)\right] = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega}\times\left[\sum_{k=1}^{3} y_k\hat{f}_k(t)\right];
$$

ma l'ultima sommatoria è il vettore $O'P$, perciò, sostituendo, otteniamo la ***formula fondamentale della cinematica rigida***:

$$
\underline{v}_P = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega}\times O'P, \tag{4.8}
$$

cioè, il moto di un qualunque punto P è individuato una volta noto il moto dell'origine solidale O' e la velocità angolare della terna solidale rispetto alla terna fissa.

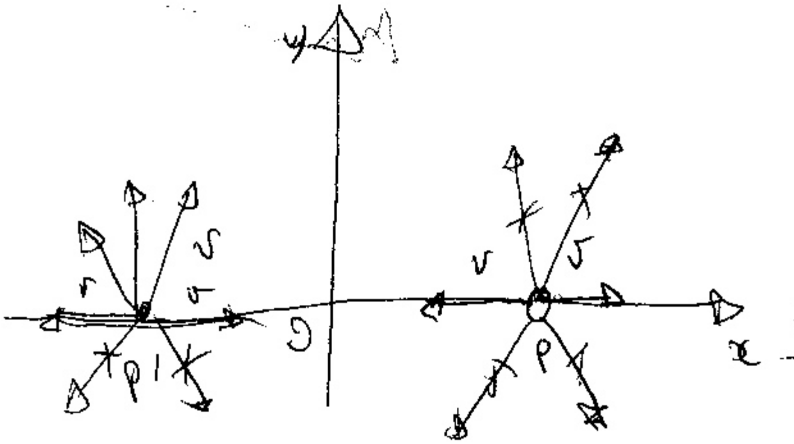
I vettori $\underline{\omega}$ e $\underline{v}_{O'}$ sono detti ***vettori caratteristici del moto rigido***.

Derivando ancora rispetto al tempo otteniamo l'accelerazione del punto P, cioè:

$$
\underline{a}_P = \frac{d^2OP}{dt^2} = \frac{d\underline{v}_P}{dt} = \frac{d\underline{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\underline{\omega}}{dt}\times O'P + \underline{\omega}\times\frac{dO'P}{dt},
$$

ma:

$$
\frac{dO'P}{dt} = \frac{dO'O}{dt} + \frac{dOP}{dt} = \frac{dOP}{dt} - \frac{dOO'}{dt} = \underline{v}_P - \underline{v}_{O'} = \underline{\omega}\times O'P
$$



$$\bar{F} = \bar{f}\,\rho\,\Delta V$$

$$P^{(i)}(P) = \underline{F}^{(i)}(P)\cdot\underline{v}$$

$$\forall v \in V$$

$$P_i = \underline{F}_i \cdot v_1 = \left(v_\Omega + \underline{\omega}\times \Omega P_i\right)\cdot F_i =$$

$$= F_i \cdot v_\Omega + \left(\underline{\omega}\times \Omega P_i\right)\cdot F_i =$$

$$= \underline{F}_i \cdot \underline{v}_\Omega + \underline{\omega}\cdot\left(\Omega P_i \times \underline{F}_i\right)$$

$$P = \sum F_i \cdot v_i = \sum_i \left(F_i \cdot v_\Omega\right) + \sum_i \underline{\omega}\cdot\left(\Omega P_i \times \underline{F}_i\right)$$

$$= \Big(\underbrace{\sum_i F_i}_{=}\Big)\cdot \underline{v}_\Omega + \underline{\omega}\cdot\Big(\underbrace{\sum_i \Omega P_i \times F_i}_{=}\Big)$$

$$= \underline{R}\cdot\underline{v}_\Omega + \underline{\omega}\cdot\underline{M}_\Omega$$

(4.3)

$$\begin{cases} u_1 = (X_1 + X_3)(e^t - 1) \\ u_2 = X_3 (e^t - e^{-t}) \\ u_3 = t X_3^2 . \end{cases}$$

$\mathcal{C}^* \equiv \{ \underline{X} : (X_1^2 + X_2^2) < 4 , X_3 \in (2,5) \}$ per $t=0$

ρ_* densità in $\mathcal{C}^*$, $\boxed{\text{Calcolare } \rho(t)} = \rho_* J^{-1}$

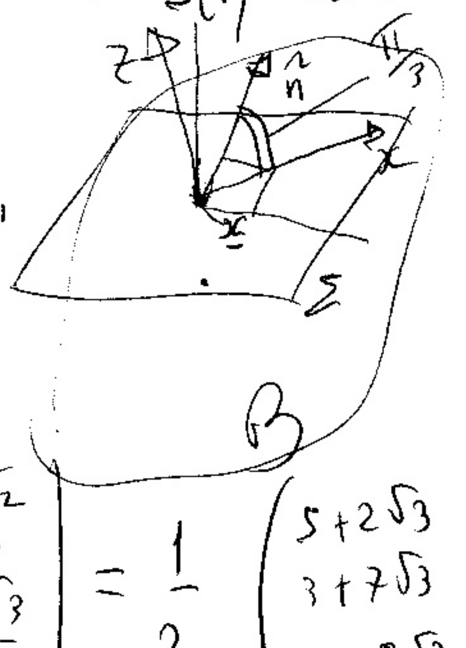
$$\begin{cases} x_1 = (X_1 + X_3)(e^t - 1) + X_1 = X_1 e^t + X_3 (e^t - 1) \\ x_2 = X_3 (e^t - e^{-t}) + X_2 \\ x_3 = t X_3^2 + X_3 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & (e^t - 1) \\ 0 & 1 & (e^t - e^{-t}) \\ 0 & 0 & (1 + 2tX_3) \end{pmatrix}, \quad J = |\underline{\underline{F}}| = e^t (1 + 2tX_3)$$

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t} (1 + 2tX_3)^{-1}$$

(4.7)

$$\underline{\underline{t}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$



$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{T}_n = \underline{\underline{t}}\, \hat{n} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 + 2\sqrt{3} \\ 3 + 7\sqrt{3} \\ 2 + 9\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(4.13)

$$\underline{t} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare sforzi e direzioni principali

Sol.: $|\underline{\underline{t}} - \lambda \underline{\underline{I}}| = \begin{pmatrix} (3-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2-4) - (-\lambda-2) +$

$+(2+\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2-4) + \lambda + 2 + \lambda + 2 = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2) +$

$+2(\lambda+2) = (\lambda+2)\left[(3-\lambda)(\lambda-2)+2\right] = (\lambda+2)\,(3\lambda-6-\lambda^2+2\lambda+2)$

$\lambda_1 = -2 \qquad = -(\lambda+2)(+\lambda^2 - 5\lambda + 4)$

$\lambda_2 + \lambda_3 = -5$, $\lambda_2 = -5-\lambda_3$

$\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 4$,

$-5\lambda_3 - \lambda_3^2 = 4$

$\lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-8}}{2} = 5\pm$

$(\lambda-4)(\lambda-1) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$

$\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 1$

$\underline{\underline{t}}\,\underline{n} = \lambda \underline{n}$, $\underline{\underline{t}}\,\underline{n} = \begin{pmatrix} 3n_1 + n_2 + n_3 \\ n_1 + 2n_3 \\ n_1 + 2n_2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \cancel{4}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

$$\psi_{,i}\, v_i + \psi\, v_{i,i} + \phi_{i,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi v_i + \phi_i\right)$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \psi(x,t)\, dV = \frac{d}{dt}\int_{V^*} (J\psi)(x(X,t),t)\, dV^*$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V^*} \widetilde{(J\psi)}(X,t)\, dV^*$$

$$\mathrm{tr}\left[F\left(T^T \dot{F} F^{-1}\right)\right] = \mathrm{tr}\left[\left(T^T \dot{F} F^{-1}\right)F\right] = \mathrm{tr}\left(T^T \dot{F} I\right) =$$

$$= \mathrm{tr}\left(T^T \dot{F}\right) \overset{\text{commut.}}{=} \mathrm{tr}\left(\dot{F} T^T\right) \overset{\text{trasposta}}{=} \mathrm{tr}\left(T \dot{F}^T\right)$$

$$\mathrm{tr}\left[S\left(\dot{F}^T F\right)\right] = S \cdot \left(\dot{F}^T F\right)^T \overset{\text{simmetria } S}{=} S \cdot \mathrm{sym}\left[\left(\dot{F}^T F\right)^T\right] = \frac{1}{2} S \cdot \left(F^T \dot{F} + \dot{F}^T F\right)$$

(4.21) Verificare che i seguenti tensori degli sforzi di Cauchy soddisfano le equazioni di equilibrio in assenza di forze di massa

(i) $$\underline{\underline{t}}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Ax_2 r^{-2} \\ 0 & 0 & Ax_1 r^{-2} \\ -Ax_2 r^{-2} & Ax_1 r^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

$r^{-2} = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}$

con $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

A, B costanti

(ii) $$\underline{\underline{t}}^2 = \begin{pmatrix} -Bx_2(3x_1^2 + x_2^2)r^{-4} & Bx_1(x_1^2 - x_2^2)r^{-4} & 0 \\ Bx_1(x_1^2 - x_2^2)r^{-4} & Bx_2(x_1^2 - x_2^2)r^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol. : (i) $\underline{0} = \rho \underline{b} + \text{div}\,\underline{\underline{t}} \quad \overset{\underline{b}=0}{\Rightarrow} \quad \boxed{\text{div}\,\underline{\underline{t}} = \underline{0}}$

$$\text{div}\,t_{e_1} = \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3} = 0 + 0 + Ax_2 \cdot 0 = 0$$

$$\text{div}\,t_{e_2} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\text{div}\,t_{e_3} = \cancel{00} + 0 + 2A\frac{x_2}{r^{-3}}x_1 - 2A\frac{x_1}{r^{-3}}x_2 = 0$$

(ii) $$\text{div}\,t_{e_1} = 4Bx_2x_1(3x_1^2 + x_2^2)r^{-6} - 6Bx_1x_2r^{-4} - 2Bx_1x_2r^{-4} - 4Bx_1x_2(x_1^2 - x_2^2)r^{-6} = Br^{-6}\big[12x_1^3x_2 + 4x_1x_2^3 - 6x_1^3x_2 - 6x_1x_2^3 - 2x_1^3x_2 - 2x_1x_2^3 - 4x_1^3x_2 + 4x_1x_2^3\big] = 0$$

$$\text{div}\,t_{e_3} = 0$$

$$\text{div}\,t_{e_2} = Br^{-6}\big[(3x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) - 4x_1^2(x_1^2 - x_2^2) + (x_1^2 - 3x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) - 4x_2^2(x_1^2 - x_2^2)\big] = 0$$