PROBLEMI PROPOSTI

4.41. Il tensore degli sforzi di Cauchy in un punto P é dato da

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare il vettore sforzo nel caso che il punto P appartenga alla giacitura di normale $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$.

4.42. Il tensore degli sforzi di Cauchy é dato da

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} x_1x_2 & x_2^2 & 0 \\ x_2^2 & x_1 & x_3 \\ 0 & x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare il vettore sforzo nel punto $P \equiv (1,2,3)$ appartenente al piano $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

4.43. Il tensore degli sforzi di Cauchy in un punto P del continuo é dato da

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinare gli autovalori e le direzioni principali di tensione.

4.44. Il tensore degli sforzi di Cauchy in un continuo é dato da

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} x_2 & \lambda x_2 & \beta x_3 \\ \lambda x_2 & 0 & (\lambda+1)x_3 \\ \beta x_3 & (\lambda+1)x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(i) la coppia (λ, β) tale che, in assenza di forze di massa, risultino verificate le equazioni di equilibrio.

(ii) il vettore sforzo nel punto $P \equiv (2,4,4)$ appartenente alla superficie di equazione $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 36 = 0$.

(iii) tracciare i cerchi di Mohr relativamente allo stato di sollecitazione nel punto P.

4.45. Il tensore degli sforzi di Cauchy in un continuo é dato da

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2^3 & (1 - x_1^2)x_2 & 0 \\ (1 - x_1^2)x_2 & x_2 x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(i) gli autovalori di $\mathbf{t}$ nel punto $P(1,2,3)$ e le direzioni principali di tensione.

(ii) la legge di variazione delle forze di massa al fine di soddisfare le equazioni di equilibrio.

(iii) il vettore sforzo nel punto P appartenente al piano $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

4.46. In un punto P del continuo il tensore degli sforzi é

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 28 & 6 & 0 \\ 6 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(i) gli autovalori di $\mathbf{t}$ e verificare che ad autovalori distinti corrispondono direzioni ortogonali.

(ii) il vettore sforzo, il suo modulo, le componenti normali e tangenziali nel caso che il punto P appartenga al piano $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$.

4.47. Un continuo é sottoposto alla forza di massa $\mathbf{f} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3$, essendo λ_i costanti assegnate. Il tensore degli sforzi é dato da

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \alpha & x_3 & x_2 \\ x_3 & \beta & x_2 x_3 \\ x_2 & x_2 x_3 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori di α, β e γ affinché siano verificate le equazioni di equilibrio.

4.48. Un mezzo continuo é sottoposto al campo di velocitá

$$v_1 = x_1 t + x_2 \quad , \quad v_2 = x_2 t + x_3 \quad , \quad v_3 = x_3 t + x_1.$$

Determinare:

(i) la funzione densitá ρ assumendo che $\rho(0) = \rho_0$.

(ii) con riferimento all'istante $t = 5$, calcolare la velocitá di allungamento nel punto $P = (1, 1, 1)$ nella direzione del vettore $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$.

4.49. Il moto di un continuo é dato da

$$x_1 = X_1 e^t + X_2 t \quad , \quad x_2 = X_2 e^t + X_3 \quad , \quad x_3 = X_3 e^t + X_1 t.$$

Il tensore degli sforzi di Cauchy é dato da

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} x_2 e^t & x_3 & 2x_1 \\ x_3 & x_1 e^t & 3x_2 \\ 2x_1 & 3x_2 & 6x_1 \end{pmatrix}.$$

Determinare i tensori di Piola-Kirchhoff.

4.50. Il moto di un continuo é dato da

$$x_1 = X_1 + X_3 e^t \quad , \quad x_2 = X_2 + X_1 e^t \quad , \quad x_3 = -X_3 t.$$

Il vettore flusso di calore **q** ha le componenti, con riferimento alla configurazione attuale, date da

$$q_1 = x_1 e^{-t} \quad , \quad q_2 = x_2 e^{-2t} \quad , \quad q_3 = x_3 e^{-3t}.$$

Determinare il vettore flusso di calore con riferimento alla configurazione iniziale.

4.33. La descrizione lagrangiana di una deformazione é data da

$$x_1 = k(2X_2 + 3X_3) \quad , \quad x_2 = k(X_1 + 3X_3) \quad , \quad x_3 = k(X_1 + 2X_2),$$

dove k é una costante positiva. Il tensore degli sforzi di Cauchy é

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2x_1 & x_2 \\ 2x_1 & 0 & 3x_3 e^{-x_1} \\ x_2 & 3x_3 e^{-x_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare i tensori degli sforzi di Piola-Kirchhoff.

(ii) Determinare il vettore trazione nel punto $\mathbf{x} \in B$ le cui coordinate spaziali sono $(5, 1, 0)$ e che agisce sulla superficie che originariamente era la superficie $X_1 + X_2 + X_3 = 0$.

4.26. Il tensore degli sforzi di Cauchy su B é dato da

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & kx_3 & 0 \\ kx_3 & 0 & -kx_1 \\ 0 & -kx_1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove k é una costante. Determinare: (i) la distribuzione della forza di massa nel caso dell'equilibrio; (ii) il vettore trazione sulla sfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9^2$ nel punto $M(4, -4, 7)$; (iii) gli sforzi principali e il valore massimo del modulo dello sforzo tangenziale in M.

4.32. Un corpo continuo occupa all'istante t_0 la regione $B_0 = \{\mathbf{X} : \quad X_1^2 + X_2^2 < 4, \ 3 < X_3 < 7\}$. Il moto del continuo é dato da

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 e^t + X_3(e^t - 1), \\ x_2 &= X_2 + X_3(e^t - e^{-t}), \\ x_3 &= tX_3^3 + X_3. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Il tensore degli sforzi di Cauchy nella configurazione attuale é

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 3x_2 e^{-t} & x_3 & x_1 \\ x_3 & 5x_3 e^{-t} & x_2 \\ x_1 & x_2 & 7x_1 \end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

(i) Determinare i tensori degli sforzi di Piola-Kirchhoff.

(ii) Determinare le forze di massa che agiscono sul continuo.

4.35. La configurazione deformata di un corpo continuo é il cilindro $B = \{\mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 <$ $4,\ 0 < x_3 < 7\}$. Il vettore flusso di calore su B é dato da

$$q_1 = 2x_1 t + x_3 \quad , \quad q_2 = 3x_1 x_2 e^{-t} \quad , \quad q_3 = 5(x_1^2 + x_2^2) t e^{-x_3 t}.$$

(i) Determinare il flusso di calore attraverso la superficie laterale.

(ii) Determinare il flusso totale di calore attraverso l'estremitá Σ situata in $x_3 = 7$.

4.36. Il moto di un continuo é dato da

$$x_1 = X_1 e^t + X_3(e^t - 1) \quad , \quad x_2 = X_2 + X_3(e^t - e^{-t}) \quad , \quad x_3 = tX_3^3 + X_3$$

e il vettore flusso di calore, che agisce nella configurazione attuale, ha le componenti

$$q_1 = 2x_1 e^{-t} \quad , \quad q_2 = 3x_2 e^{-t} \quad , \quad q_3 = 5x_3 e^{-t}.$$

(i) Determinare il vettore flusso di calore nella configurazione di riferimento.

(ii) Determinare il flusso di calore nel punto $\mathbf{x} \in B$ le cui coordinate spaziali sono $(1, -e^{-t}, 0)$ attraverso la superficie che originariamente (nella configurazione di riferimento) era la superficie $X_1 + X_2 = 0$.