$$t_i = 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial n} + \lambda u_{r,r} n_i + \mu(\mathbf{n} \times \mathrm{curl}\mathbf{u})_i.$$

La relazione precedente implica il risultato desiderato.

6.4. Un materiale elastico, omogeneo ed isotropo occupa la regione $\{\mathbf{x} : a_2^2 < x_1^2 + x_2^2 < a_1^2 \ , \ 0 < x_3 < h\}$, dove $a_1 > a_2 > 0$. Il tubo é soggetto a pressioni costanti interne ed esterne sulle superfici laterali e alle forze costanti longitudinali sulle basi. Studiare l'equilibrio del corpo in assenza delle forze di massa.

Soluzione. In questo caso si puó intuire che il vettore spostamento ha la forma $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}$ dove

$$\begin{aligned}
&u_\alpha^{(1)} = x_\alpha g(r) \quad , \quad u_3^{(1)} = 0 \quad , \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \\
&u_\alpha^{(2)} = 0 \quad , \quad u_3^{(2)} = c x_3,
\end{aligned}$$

dove g é una funzione di r e c é una costante. Quindi, cerchiamo la soluzione nella forma

$$u_\alpha = x_\alpha g(r) \quad , \quad u_3 = c x_3, \tag{6.2}$$

dove c é una costante incognita e g é una funzione incognita. Dalla (4.2) abbiamo

$$\begin{aligned}
u_{\alpha,\beta} &= \delta_{\alpha\beta} g + x_\alpha x_\beta r^{-1} g' \quad , \quad g' = \frac{dg}{dr}, \\
u_{\alpha,3} &= 0 \quad , \quad u_{3,\alpha} = 0 \quad , \quad u_{3,3} = c \quad , \quad u_{r,r} = c + 2g + r g', \\
u_{\alpha,\beta\gamma} &= r^{-1} g'(\delta_{\alpha\beta} x_\gamma + \delta_{\alpha\gamma} x_\beta + \delta_{\beta\gamma} x_\alpha) - x_\alpha x_\beta x_\gamma r^{-3} g' + \\
&\quad + x_\alpha x_\beta x_\gamma r^{-2} g'' \quad , \quad u_{r,ri} = x_\alpha (g'' + 3r^{-1} g'), \\
\Delta u_\alpha &= x_\alpha (g'' + 3r^{-1} g').
\end{aligned} \tag{6.3}$$

In assenza delle forze di massa le equazioni di equilibrio si riducono a

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) u_{r,ri} = 0. \tag{6.4}$$

In base alla (6.3) l'equazione precedente prende la forma

$$x_\alpha(\lambda + 2\mu)(g'' + 3r^{-1}g') = 0,$$

per cui

$$(r^3 g')' = 0.$$

Pertanto otteniamo

$$g(r) = C_1 r^{-2} + C_2, \tag{6.5}$$

dove C_α sono costanti arbitrarie. Il tensore degli sforzi é dato da

$$\begin{aligned} t_{\alpha\beta} &= \lambda(2C_2 + c)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu(\delta_{\alpha\beta} g + x_\alpha x_\beta r^{-1} g'), \\ t_{\alpha 3} &= 0 \quad , \quad t_{33} = 2\lambda C_2 + (\lambda + 2\mu)c. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Sulle superfici laterali abbiamo le condizioni

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= -p_1 \mathbf{n} \quad \text{per} \quad r = a_1, \\ \mathbf{t} &= -p_2 \mathbf{n} \quad \text{per} \quad r = a_2, \end{aligned}$$

dove p_1 e p_2 sono costanti assegnate. Le condizioni precedenti possono essere scritte nella forma

$$\begin{aligned} t_\alpha &= -p_1 n_\alpha \quad \text{per} \quad r = a_1, \\ t_\alpha &= -p_2 n_\alpha \quad \text{per} \quad r = a_2, \end{aligned} \tag{6.7}$$

Naturalmente,

$$t_\alpha = t_{\beta\alpha} n_\beta.$$

Per la frontiera $r = a_1$ abbiamo $n_\alpha = x_\alpha / a_1$ e per la frontiera $r = a_2$ abbiamo $n_\alpha = -x_\alpha / a_2$. In questo modo le condizioni (6.7) diventano

$$\begin{aligned} t_{\beta\alpha} x_\beta &= -p_1 x_\alpha \quad \text{per} \quad r = a_1, \\ t_{\beta\alpha} x_\beta &= -p_2 x_\alpha \quad \text{per} \quad r = a_2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Dalle (6.5) e (6.6) segue che

$$t_{\beta\alpha} x_\beta = x_\alpha [2(\lambda + \mu) C_2 - 2\mu C_1 r^{-2} + \lambda c],$$

cosicché le condizioni (6.8) diventano

$$\begin{aligned} 2(\lambda + \mu) C_2 - 2\mu a_1^{-2} C_1 + \lambda c &= -p_1, \\ 2(\lambda + \mu) C_2 - 2\mu a_2^{-2} C_1 + \lambda c &= -p_2. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Sulle basi abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= P \mathbf{e}_3 \quad \text{su} \quad x_3 = h, \\ \mathbf{t} &= -P \mathbf{e}_3 \quad \text{su} \quad x_3 = 0, \end{aligned} \tag{6.10}$$

dove P é una costante data. Le condizioni (6.10) sono soddisfatte se e solo se

$$t_{33} = P. \tag{6.11}$$

Dalle (6.6) e (6.11) segue che

$$2\lambda C_2 + (\lambda + 2\mu) c = 0. \tag{6.12}$$

Dalle (6.9) e (6.12) troviamo

$$C_1 = \frac{(p_1 - p_2)a_1^2 a_2^2}{2\mu(a_2^2 - a_1^2)} \quad , \quad C_2 = \frac{(\lambda + 2\mu)(p_1 a_1^2 - p_2 a_2^2)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)(a_2^2 - a_1^2)} - \tag{6.13}$$

$$- \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} P \quad , \quad c = - \frac{\lambda(p_1 a_1^2 - p_2 a_2^2)}{\mu(3\lambda + 2\mu)(a_2^2 - a_1^2)} + \frac{(\lambda + \mu)P}{\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

Grazie alla (5.46) possiamo esprimere (6.13) nella forma

$$C_1 = \frac{(1+\nu)(p_1 - p_2)a_1^2 a_2^2}{E(a_2^2 - a_1^2)} \quad , \quad C_2 = \frac{(1-\nu)(p_1 a_1^2 - p_2 a_2^2)}{E(a_2^2 - a_1^2)} - \frac{\nu P}{E},$$

$$c = - \frac{2\nu(p_1 a_1^2 - p_2 a_2^2)}{E(a_2^2 - a_1^2)} + \frac{P}{E}.$$

6.5. Le equazioni di compatibilitá (1.20), combinate con le equazioni costitutive (5.45) e le equazioni di equilibrio (5.39), producono le equazioni

$$\Delta t_{ij} + \frac{1}{1+\nu} t_{ss,ij} + \rho_0 (f_{i,j} + f_{j,i}) + \frac{\nu \rho_0}{1-\nu} f_{r,r} \delta_{ij} = 0,$$

che sono chiamate le *equazioni di compatibilitá di Beltrami-Michell per i corpi elastici omogenei ed isotropi*. Stabilire queste equazioni e determinare la forma che esse assumono quando le forze di massa sono conservative.

Soluzione. Sostituendo (5.45) nella (1.20) si ottiene

$$(1+\nu)(t_{ij,rs} + t_{rs,ij} - t_{ir,js} - t_{js,ir}) - \nu(t_{pp,rs}\delta_{ij} + t_{pp,ij}\delta_{rs} - t_{pp,js}\delta_{ir} - t_{pp,ir}\delta_{js}) = 0.$$

Se prendiamo $r = s$, otteniamo

$$(1+\nu)(\Delta t_{ij} + t_{pp,ij} - t_{is,sj} - t_{js,si}) - \nu(\delta_{ij}\Delta t_{pp} + t_{pp,ij}) = 0.$$

Concludiamo che

$$C_1 = \frac{p_1 a_1^3 - p_2 a_2^3}{(3\lambda + 2\mu)(a_2^3 - a_1^3)} \quad , \quad C_2 = \frac{(p_1 - p_2) a_1^3 a_2^3}{4\mu(a_2^3 - a_1^3)}.$$

21

6.7. Si consideri una cavitá sferica di raggio a in un corpo omogeneo ed isotropo non limitato. La superficie di detta cavitá é soggetta ad una pressione costante. Studiare l'equilibrio del corpo in assenza delle forze di massa.

Soluzione. Supponiamo che il corpo occupi il dominio $\{\mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > a^2\}$. Poniamo $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ e cerchiamo la soluzione nella forma $u_i = x_i \varphi(r)$. Come nel Problema 6.6, le equazioni di equilibrio sono soddisfatte se e solo se

$$\varphi = C_1 r^{-3} + C_2,$$

dove C_α sono costanti arbitrarie. Le condizioni al contorno sono

$$t_{ji} n_j = -P n_i \quad \text{su} \quad r = a,$$

$$u_i \to 0 \quad \text{per} \quad r \to \infty,$$

dove P é una costante data. L'ultima condizione implica che $C_2 = 0$ cosicché

$$u_i = C_1 r^{-3} x_i.$$

Il vettore trazione sulla superficie $r = a$ é dato da

$$t_i = 4\mu a^{-4} C_1 x_i,$$

per cui dalla condizione al contorno troviamo che

$$C_1 = \frac{P a^3}{4\mu}.$$

Il campo del vettore spostamento é dato da

$$u_i = \frac{P}{4\mu}\left(\frac{a}{r}\right)^3 x_i.$$

Il raggio della cavitá deformata é $a\ (1 + P/4\mu)$.

6.8. Un materiale elastico omogeneo ed isotropo occupa la regione $\{\mathbf{x} : a_2^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < a_1^2\}$ dove $a_1 > a_2 > 0$. Il corpo é soggetto alla pressione costante P sulla superficie interna, mentre la superficie esterna é saldata ad un corpo rigido circostante. Studiare l'equilibrio del corpo in assenza delle forze di massa.

Soluzione. Le equazioni (5.56) diventano

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) u_{r,ri} = 0.$$

Sia $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Le condizioni al contorno sono

$$t_{ij} n_j = -P n_i \quad \text{per} \quad r = a_2,$$
$$u_i = 0 \quad \text{per} \quad r = a_1,$$

dove P é una costante data. Cerchiamo la soluzione nella forma

$$u_i = x_i \varphi(r),$$

dove φ é una funzione incognita. Dalla (6.16) le equazioni di equilibrio si riducono a

$$(r^4 \varphi)' = 0,$$

per cui

$$\varphi = C_1 r^{-3} + C_2,$$

dove C_α sono costanti arbitrarie. Il vettore trazione sulla superficie $r = a_2$ é dato da

$$t_i = -\frac{1}{a_2} t_{ji} x_j = -\frac{1}{a_2} x_i [(3\lambda + 2\mu) C_2 - 4\mu C_1 a_2^{-3}].$$

Le condizioni al contorno si riducono a

$$\begin{aligned} (3\lambda + 2\mu) C_2 - 4\mu C_1 a_2^{-3} &= -P, \\ C_1 a_1^{-3} + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Questo sistema implica che

$$C_1 = \frac{P}{(3\lambda + 2\mu) a_1^{-3} + 4\mu a_2^{-3}} \quad , \quad C_2 = -\frac{P a_1^{-3}}{(3\lambda + 2\mu) a_1^{-3} + 4\mu a_2^{-3}}.$$

In questo modo, con l'aiuto della (5.46), troviamo che

$$u_i = \frac{(1 - 2\nu) P x_i [(a_1/r)^3 - 1]}{E\{1 + [2(1 - 2\nu)/(1 + \nu)](a_1/a_2)^3\}}.$$

con $E = \frac{\mu(3\nu+2\mu)}{\nu+\mu}$ modulo di Young e $\tilde{\nu} = \frac{\nu}{2(\nu+\mu)}$ coefficiente di Poisson.

Osservazione. Lo spostamento del punto $A(a_2, 0, 0)$ é dato da

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{(1 - 2\nu) P a_2 [(a_1/a_2)^3 - 1]}{E\{1 + [2(1 - 2\nu)/(1 + \nu)](a_1/a_2)^3\}}, \\ u_2^* &= u_3^* = 0. \end{aligned}$$

Il raggio interno del guscio deformato é $R = a_2 + u_1^*$.

6.9. Studiare la deformazione di un cilindro retto dovuta al proprio peso.

Soluzione. Consideriamo il cilindro $B_0 = \{\mathbf{x} : (x_1, x_2) \in \Sigma \ , \ 0 < x_3 < h\}$ dove Σ é la sezione trasversale generica. Supponiamo che il cilindro sia occupato da un materiale isotropo ed omogeneo. Il cilindro é vincolato attraverso la base piú alta $x_3 = h$ e supponiamo che la forza di gravitá sia la sola forza esterna agente su di esso. Se il verso dell'asse x_3 é verticalmente ascendente, allora la forza di massa ha le componenti $f_1 = f_2 = 0$, $f_3 = -g$, dove g é il modulo dell'accelerazione di gravitá . Abbiamo poi le condizioni al contorno

$$t_{\alpha i} n_\alpha = 0 \quad \text{su} \quad \Pi,$$

$$t_{3i} = 0 \quad \text{su} \quad x_3 = 0 \quad , \quad t_{3i} = \rho_0 g h \delta_{3i} \quad \text{su} \quad x_3 = h,$$

dove Π é la frontiera laterale. E' semplice verificare che le condizioni necessarie e sufficienti (5.41) per l'esistenza di una soluzione del problema sono soddisfatte. Cerchiamo la soluzione nella forma

$$t_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad t_{\alpha 3} = 0 \quad , \quad t_{33} = t_{33}(x_3).$$

Le equazioni di equilibrio (5.37) si riducono a

$$t_{33,3} - \rho_0 g = 0,$$

per cui

$$t_{33} = \rho_0 g x_3 + C,$$

dove C é una costante arbitraria. Le condizioni sulle basi sono soddisfatte se e solo se $C = 0$. In questo modo

$$t_{33} = \rho_0 g x_3.$$

Le condizioni sulla superficie laterale sono identicamente soddisfatte. Dalla (5.45),

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{1}{E}\rho_0 \nu g x_3 \quad , \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\rho_0 g x_3, \tag{6.17}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0. \tag{6.18}$$

Chiaramente, le equazioni di compatibilitá sono soddisfatte. Dalle equazioni (6.17) troviamo che

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{\nu}{E}\rho_0 g x_1 x_3 + v_1(x_2, x_3),\\
u_2 &= -\frac{\nu}{E}\rho_0 g x_2 x_3 + v_2(x_1, x_3),\\
u_3 &= \frac{1}{2E}\rho_0 g x_3^2 + v_3(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

dove v_i sono funzioni indeterminate. Se sostituiamo u_i nella (6.18) otteniamo

$$\begin{aligned}
v_{1,2} + v_{2,1} &= 0,\\
v_{1,3} + v_{3,1} &= \frac{\nu}{E}\rho_0 g x_1,\\
v_{2,3} + v_{3,2} &= \frac{\nu}{E}\rho_0 g x_2.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Derivando rispetto a x_i, troviamo che

$$\begin{aligned}
&v_{1,22} = 0 \quad , \quad v_{1,33} = 0 \quad , \quad v_{1,23} = 0,\\
&v_{2,11} = 0 \quad , \quad v_{2,33} = 0 \quad , \quad v_{2,13} = 0,\\
&v_{3,11} = \frac{\nu}{E}\rho_0 g \quad , \quad v_{3,22} = \frac{\nu}{E}\rho_0 g \quad , \quad v_{3,12} = 0.
\end{aligned}$$

Se integriamo queste equazioni arriviamo a

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_1 x_2 + a_2 x_3 + a_3,\\
v_2 &= b_1 x_1 + b_2 x_3 + b_3,\\
v_3 &= \frac{\nu}{2E}\rho_0 g(x_1^2 + x_2^2) + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3,
\end{aligned} \tag{6.20}$$

dove a_i, b_i e c_i sono costanti arbitrarie. Le funzioni v_i date dalla (6.20) devono soddisfare le equazioni (6.19). Questo fatto implica che

$$a_1 + b_1 = 0 \quad , \quad b_2 + c_2 = 0 \quad , \quad a_2 + c_1 = 0.$$

Se introduciamo le notazioni

$$\omega_1^0 = c_2 \quad , \quad \omega_2^0 = a_2 \quad , \quad \omega_3^0 = -a_1 \quad , \quad d_1 = a_3 \quad , \quad d_2 = b_3 \quad , \quad d_3 = c_3,$$

allora le componenti del campo di spostamento sono date da

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{E}\rho_0 g x_1 x_3 + \omega_2^0 x_3 - \omega_3^0 x_2 + d_1, \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E}\rho_0 g x_2 x_3 + \omega_3^0 x_1 - \omega_1^0 x_3 + d_2, \\ u_3 &= \frac{1}{2E}\rho_0 g(x_3^2 + \nu x_1^2 + \nu x_2^2) + \omega_1^0 x_2 - \omega_2^0 x_1 + d_3. \end{aligned}$$

La parte lineare della soluzione rappresenta uno spostamento rigido. Se richiediamo che il vettore di rotazione e il vettore spostamento si annullano in $(0, 0, h)$ allora otteniamo $\omega_i^0 = 0$, $d_\alpha = 0$ e

$$d_3 = -\frac{1}{2E}\rho_0 g h^2.$$

In questo caso,

$$\begin{aligned} u_\alpha &= -\frac{\nu}{E}\rho_0 g x_\alpha x_3, \\ u_3 &= \frac{1}{2E}\rho_0 g(x_3^2 + \nu x_1^2 + \nu x_2^2 - h^2). \end{aligned} \tag{6.21}$$

Osservazione. (i) Notiamo che il risultante degli sforzi sulla frontiera é dato da

$$\mathbf{R} = \int_{\partial B_0} \mathbf{t} da = \mathbf{e}_3 \int_{\Sigma} \rho_0 g h da = \rho_0 g A h \mathbf{e}_3,$$

dove A é l'area della sezione trasversale. Chiaramente, $|\mathbf{R}|$ é il peso totale del corpo.

(ii) Dalla (6.21) si vede che i punti situati sull'asse x_3 sono spostati verticalmente secondo la legge

$$u_3 = -\frac{1}{2E}\rho_0 g(h^2 - x_3^2).$$

Tutti gli altri punti del cilindro hanno spostamenti sia verticali che orizzontali. La forma del corpo , dopo la deformazione, é indicata nella Fig. 11. La base piú alta del cilindro é curvata verso l'alto a causa della distribuzione della tensione t_{33} supposta uniforme sulla superficie $x_3 = h$ e per il fatto che il punto $(0, 0, h)$ é supposto fisso.

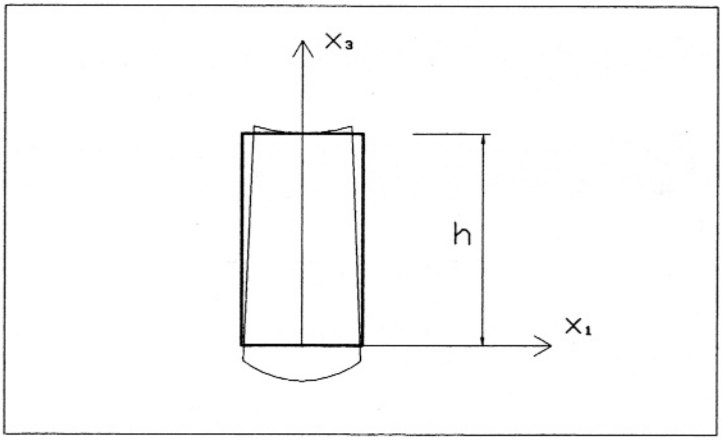

Figura 11

6.10. Sia

$$u_i = -(\lambda + \mu)G_{r,ri} + (\lambda + 2\mu)\Delta G_i, \tag{6.22}$$

dove G_i sono campi di classe C^4 su B_0 che soddisfano le equazioni

$$\Delta\Delta G_i = -\frac{\rho_0}{\mu(\lambda + 2\mu)} f_i. \tag{6.23}$$

6.15. Studiare il problema di deformazione piana per il dominio $\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a_2^2 < x_1^2 + x_2^2 < a_1^2\}$, $a_1 > a_2 > 0$, quando il corpo é in equilibrio in assenza delle forze di massa e la superficie laterale é sottoposta a pressioni costanti. Il tubo é occupato da un materiale elastico omogeneo ed isotropo.

Soluzione. Cerchiamo di risolvere il problema supponendo che

$$u_\alpha = x_\alpha \varphi(r) \quad , \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \tag{6.49}$$

dove φ é una funzione incognita. Le equazioni di equilibrio hanno la forma

$$\mu \Delta u_\alpha + (\lambda + \mu) u_{\rho,\rho\alpha} = 0. \tag{6.50}$$

Poiché

$$\begin{aligned}
u_{\alpha,\beta} &= \delta_{\alpha\beta}\varphi + x_\alpha x_\beta r^{-1}\varphi' \quad , \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dr}, \\
u_{\rho,\rho} &= 2\varphi + r\varphi' \quad , \quad u_{\rho,\rho\alpha} = (3r^{-1}\varphi' + \varphi'')x_\alpha, \\
u_{\alpha,\beta\gamma} &= (\delta_{\alpha\beta}x_\gamma + \delta_{\alpha\gamma}x_\beta + \delta_{\beta\gamma}x_\alpha)r^{-1}\varphi' - \\
&\quad - r^{-3}x_\alpha x_\beta x_\gamma \varphi' + x_\alpha x_\beta x_\gamma r^{-2}\varphi'', \\
\Delta u_\alpha &= (3r^{-1}\varphi' + \varphi'')x_\alpha,
\end{aligned} \tag{6.51}$$

dalla (6.50) otteniamo

$$x_\alpha(\lambda + 2\mu)(\varphi'' + 3r^{-1}\varphi') = 0.$$

Le equazioni di equilibrio sono soddisfatte se e solo se

$$\varphi'' + 3r^{-1}\varphi' = 0.$$

Questa equazione puó essere scritta nella forma

$$(r^3\varphi')' = 0,$$

per cui

$$\varphi(r) = C_1 r^{-2} + C_2,$$

dove C_α sono costanti arbitrarie. Dalle equazioni costitutive otteniamo

$$t_{\alpha\beta} = 2(\lambda + \mu)\varphi\delta_{\alpha\beta} + (\lambda r\delta_{\alpha\beta} + 2\mu x_\alpha x_\beta r^{-1})\varphi'.$$

Le condizioni al contorno sono

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= -p_1\mathbf{n} \quad \text{su} \quad r = a_1, \\ \mathbf{t} &= -p_2\mathbf{n} \quad \text{su} \quad r = a_2, \end{aligned}$$

dove p_α sono costanti assegnate. Abbiamo $t_\alpha = t_{\beta\alpha}n_\beta$ e

$$n_\beta = \frac{1}{a_1}x_\beta \quad \text{per} \quad r = a_1 \quad , \quad n_\beta = -\frac{1}{a_2}x_\beta \quad \text{per} \quad r = a_2.$$

Le condizioni al contorno si riducono a

$$\begin{aligned} t_{\beta\alpha}x_\beta &= -p_1 x_\alpha \quad \text{per} \quad r = a_1, \\ t_{\beta\alpha}x_\beta &= -p_2 x_\alpha \quad \text{per} \quad r = a_2. \end{aligned}$$

Poiché

$$t_{\beta\alpha}x_\beta = x_\alpha[2(\lambda + \mu)\varphi + (\lambda + 2\mu)r\varphi'] = 2x_\alpha[(\lambda + \mu)C_2 - \mu r^{-2}C_1],$$

le suddette condizioni si riducono a

$$(\lambda + \mu)C_2 - \mu a_1^{-2}C_1 = -\frac{1}{2}p_1,$$

$$(\lambda + \mu)C_2 - \mu a_2^{-2} C_1 = -\frac{1}{2} p_2.$$

Quindi

$$C_1 = \frac{a_1^2 a_2^2 (p_2 - p_1)}{2\mu(a_1^2 - a_2^2)} \quad , \quad C_2 = \frac{p_2 a_2^2 - p_1 a_1^2}{2(\lambda + \mu)(a_1^2 - a_2^2)}.$$

Le componenti del tensore degli sforzi sono date da

$$t_{\alpha\beta} = 2\mu C_1 r^{-2} \delta_{\alpha\beta} - 4\mu x_\alpha x_\beta C_1 r^{-4} + 2(\lambda + \mu) C_2 \delta_{\alpha\beta},$$
$$t_{33} = 2\lambda C_2 \quad , \quad t_{\alpha 3} = 0.$$

PROBLEMI PROPOSTI

6.55. Studiare la deformazione del cilindro circolare retto di altezza h costituito da un materiale omogeneo ed isotropo. Il cilindro, avente la base inferiore incastrata e la base superiore libera, é sottoposto alla forza di massa

$$f_1 = 0 \quad , \quad f_2 = 0 \quad , \quad f_3 = -(k + g) \quad \text{con} \quad k > 0.$$

mentre la superficie laterale é scarica.

6.56. Sia $u_i = \lambda_i x_1 + F_i$, dove F_i sono funzioni di classe C^2 su B_0 che soddisfano le equazioni $\Delta F_i = 0$.
Determinare la legge delle forze di massa al fine di soddisfare le equazioni di equilibrio di Navier-Cauchy.