Es. 10.2)

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i}(p\,\delta_{ij}) = \frac{\partial p}{\partial x_i}\,\delta_{ij} = \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

$\Leftrightarrow$ grad $p = 0 \Rightarrow p = p_0$ costante

Es. 10.3) Provare che un fluido perfetto e barotropico (cioè con $p = \tilde{p}(\rho)$) solo sotto forze di massa di tipo conservativo (cioè tali che esiste un potenziale U tale che grad $U = \underline{F}$)

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} = \rho\, b_j \Leftrightarrow p'(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial \underline{x}} = \rho\, \underline{b}$$

$$\frac{p'}{\rho}\,d\rho = \underline{b}\cdot d\underline{x} \Leftrightarrow \int \frac{p'}{\rho}\,d\rho = \int \underline{b}\cdot d\underline{x}$$

$\Rightarrow$ introducendo la funzione di pressione data

$$U(\rho) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{p'\,d\rho}{\rho}$$

$$= \int \underline{b}\cdot d\underline{x} \Rightarrow \text{grad}\, U = \underline{b}$$

Es n. 10.5: Un recipiente, riempito con un fluido perfetto incomprimibile, è sottoposto ad una accelerazione costante $\underline{a} = c_2 \hat{e}_2 + c_3 \hat{e}_3$ in un campo di gravità parallelo alla direzione $(-x_3)$. Determinare l'equazione della superficie libera del fluido.

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} = -\rho_* (g + c_3)\hat{e}_3 - \rho_0 c_2 \hat{e}_2;$$

Dim:

Si ha dalla (8.41): 1) $\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$, 2) $\frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho_0 c_2$ 3) $\frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho_0 (c_3 + g)$

2) $p(\underline{x}) = \rho_0 c_2 x_2 + F_1(x_3, t)$, 3) $p(\underline{x}) = \rho_0 (c_3 + g) x_3 + F_2(x_2, t)$

$$\boxed{1) \quad p(\underline{x}) = F_0(x_2, x_3, t)}$$

$$\rho_0 c_2 x_2 + F_1(x_3, t) = \rho_0 (c_3 + g) x_3 + F_2(x_2, t)$$

$$-F_2(x_2, t) + \rho_0 c_2 x_2 = \rho_0 (c_3 + g) x_3 - F_1(x_3, t) \;(= -A(t))$$

$\forall x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow \quad F_2(x_2, t) = \rho_0 c_2 x_2 + A(t) \quad \text{con } A(t) \text{ arbitraria}$$

$$F_1(x_3, t) = \rho_0 x_3 (c_3 + g) + A(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{p(\underline{x}) = \rho_* c_2 x_2 + \rho_0 (c_3 + g) x_3 + A(t),} \quad \forall t.$$

Calcolando la pressione in $(d, 0, 0)$ si ha, per ogni t,

$p(d,0,0) = p_0$, con $p_0 \equiv A(t)$ costante. Poiché $p = p_0$ su tutta la superficie libera del fluido a contatto con l'atmosfera, si ha la seguente equazione di tale superficie:

$$c_2 x_2 + (c_3 - g) x_3 = 0$$

Quindi la superficie libera è un piano.

10.8. Un fluido perfetto ed incomprimibile é in quiete sotto l'azione della forza $\mathbf{f} = -k^2\mathbf{x}$ ($k =$ cost.). Determinare la superficie libera e la pressione se il volume del fluido é V.

Soluzione. Dalla (9.21), troviamo le equazioni di equilibrio

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\rho_0 k^2 x_i.$$

Integrando

$$p = -\frac{1}{2}\rho_0 k^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + c,$$

dove c é una costante arbitraria. Assumiamo che sulla superficie libera abbiamo $p = 0$. Per cui l'equazione di questa superficie é

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{2c}{\rho_0 k^2}.$$

La costante c é determinata dalla condizione che il volume del fluido é V. Otteniamo

$$c = \frac{1}{4}\rho_0 k^2 \left(\frac{3}{2\pi}V\right)^{2/3}.$$

Pertanto concludiamo che

$$p = -\frac{1}{2}k^2\rho_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{1}{4}k^2\rho_0\left(\frac{3}{2\pi}V\right)^{2/3}.$$

Osserviamo che la pressione nell'origine é $p^* = c$.

10.9. Un fluido perfetto e barotropico con equazione costitutiva

$$p = k\rho^\gamma,$$

dove k e γ sono costanti e $\gamma \neq 1$, fluisce da un grande contenitore chiuso attraverso una sottile condotta liscia. Se la pressione nel contenitore é N volte la pressione atmosferica, determinare la velocitá del fluido uscente nel caso che il moto sia stazionario.

Soluzione. Usiamo l'equazione di Bernoulli per moti stazionari (9.26). Sia A un punto in quiete nel fluido del recipiente e sia B un punto situato alla fine della condotta. Dalla (9.26) abbiamo

$$\frac{1}{2}v^2(A) + \mathcal{P}(A) - U(A) = \frac{1}{2}v^2(B) + \mathcal{P}(B) - U(B).$$

Assumiamo che le forze di massa siano nulle. Poiché

$$\mathcal{P} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho},$$

otteniamo

$$v^2(B) = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p(A)}{\rho(A)} - \frac{p(B)}{\rho(B)}\right).$$

Tenendo conto che $p(A) = Np(B)$ si ha

$$v^2(B) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p(B)}{\rho(B)}\left(N\frac{\rho(B)}{\rho(A)} - 1\right).$$

10.13. Un fluido perfetto ed incomprimibile che occupa l'intero spazio é in equilibrio in assenza delle forze di massa. Esso é sottoposto ad una pressione uniforme all'infinito. All'istante $t = 0$ nello spazio occupato dal fluido viene ricavata una sfera vuota di centro O e raggio R. Determinare l'intervallo di tempo $(0, T)$ nel quale il fluido riempie la cavitá sferica.

Soluzione. Cerchiamo di risolvere il problema supponendo che

$$v_i = x_i \varphi(r,t) \quad , \quad p = p(r,t) \quad , \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

dove φ e p sono funzioni incognite. Abbiamo

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \varphi \delta_{ij} + x_i x_j \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

L'equazione di continuitá (9.18) diventa

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^3 \varphi) = 0$$

per cui

$$\varphi = r^{-3} F(t),$$

dove F é una funzione arbitraria del tempo. Cosí ,

$$a_i = \dot{v}_i = x_i r^{-3} (\dot{F} - 2r^{-3} F^2)$$

e le equazioni di moto (9.21) si riducono a

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho_0 x_i r^{-3}(\dot{F} - 2r^{-3}F^2).$$

Otteniamo

$$p = \rho_0(r^{-1}\dot{F} - \frac{1}{2}r^{-4}F^2) + h(t),$$

dove h é una funzione arbitraria del tempo. Se usiamo la condizione che $p \to p_0$ per $r \to \infty$ otteniamo

$$p = p_0 + \rho_0(r^{-1}\dot{F} - \frac{1}{2}r^{-4}F^2).$$

Sia $z(t)$ il raggio della cavitá all'istante t. Sulla superficie della cavitá la pressione é zero per cui

$$p_0 + \rho_0(z^{-1}\dot{F} - \frac{1}{2}z^{-4}F^2) = 0.$$

La velocitá puó essere espressa nella forma

$$\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i = r^{-3}F(t)x_i\mathbf{e}_i,$$

per cui $F \leq 0$ e

$$v = -r^{-2}F \quad , \quad v = -\dot{r}.$$

essendo r una funzione decrescente di t. Ora abbiamo

$$2p_0F + 2\rho_0(z^{-1}\dot{F}F - \frac{1}{2}z^{-4}F^3) = 0.$$

Poiché $2p_0F = 2p_0z^2\dot{z}$, otteniamo

$$2p_0z^2\dot{z} + 2\rho_0z^{-1}F\dot{F} - \rho_0z^{-2}\dot{z}F^2 = 0,$$

oppure

$$2p_0 z^2 \dot{z} = -\rho \frac{d}{dt}(z^{-1}F^2).$$

Concludiamo che

$$z^{-1}F^2 = -\frac{2}{3}\frac{p_0}{\rho_0}z^3 + c_1,$$

dove c_1 é una costante arbitraria. Dalle condizioni

$$z(0) = R \quad , \quad F(0) = 0,$$

deriva che

$$c_1 = \frac{2}{3}\frac{p_0}{\rho_0}R^3,$$

per cui

$$z^{-1}F^2 = \frac{2p_0}{3\rho_0}(R^3 - z^3).$$

Tenendo presente che $F = z^2\dot{z}$, otteniamo

$$dz = -\left(\frac{2p_0}{3\rho_0}\right)^{1/2}\left\{\left(\frac{R}{z}\right)^3 - 1\right\}^{1/2} dt.$$

Il valore di T é dato da

$$T = \left(\frac{3\rho_0}{2p_0}\right)^{1/2}\int_0^R \left[\left(\frac{R}{z}\right)^3 - 1\right]^{-1/2} dz.$$

Sia y definita da $z^3 = R^3 y$. Allora

$$T = R(\frac{\rho_0}{6p_0})^{1/2} \int_0^1 y^{-1/6}(1-y)^{-1/2}dy =$$

$$= R\left(\frac{\rho_0}{6p_0}\right)^{1/2} B\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}R\left(\frac{\rho_0}{2\pi p_0}\right)^{1/2}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right),$$

dove

$$B(q,s) = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{s-1}dx \quad , \quad \Gamma(q) = \int_0^\infty x^{q-1}e^{-x}dx \quad , \quad (q > 0 \ , \ s > 0).$$

10.14. Un fluido perfetto ed incomprimibile occupa l'esterno della sfera Σ di centro O e raggio R. La regione Σ é riempita di esplosivo che detona a $t = 0$. Supponiamo che non agisca alcuna forza di massa e che l'esplosione produca un moto a simmetria sferica.

Determinare l'equazione soddisfatta dal raggio della cavitá all'istante t se la pressione nel fluido prima dell'esplosione é p_0 e la pressione esercitata sulla superficie della cavitá é P (p_0 e P sono assegnate).

Soluzione. A causa della simmetria cercheremo la soluzione nella forma

$$v_i = x_i \Psi(r,t),$$

dove Ψ é una funzione incognita e $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Cosí

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \Psi \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r}\Psi' \quad , \quad \Psi' = \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \tag{10.17}$$

Notiamo che la (10.17) evidenzia che il moto é irrotazionale. L'equazione di continuitá (9.18) si riduce a

$$(r^3\Psi)' = 0,$$

per cui

$$\Psi = r^{-3} G(t),$$

dove G é una funzione arbitraria del tempo. Quindi,

$$v_i = r^{-3} x_i G(t). \tag{10.18}$$

Dalla (10.18) risulta che

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = x_i r^{-3} (\dot{G} - 2r^{-3} G^2).$$

Le equazioni di moto (9.21) si riducono a

$$\rho_0 a_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0,$$

per cui

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\rho_0 x_i r^{-3} (\dot{G} - 2r^{-3} G^2).$$

Otteniamo poi

$$dp = -\rho_0 r^{-2} (\dot{G} - 2r^{-3} G^2) dr.$$

In questo modo risulta

$$p = \rho_0 \left(r^{-1} \dot{G} - \frac{1}{2} r^{-4} G^2 \right) + f(t),$$

dove f é una funzione arbitraria del tempo. Se usiamo la condizione che $p \to p_0$ per $r \to \infty$, che deriva dal fatto che il cambiamento di pressione dovuto all'esplosione deve tendere a zero quando si incrementa la distanza dalla cavitá , allora abbiamo

$$p = p_0 + \rho_0\left(r^{-1}\dot{G} - \frac{1}{2}r^{-4}G^2\right).$$

Denotiamo con $y(t)$ il raggio della cavitá all'istante t. Sulla superficie della cavitá , $r = y(t)$ e $p = P(y,t)$, per cui

$$P = p_0 + \rho_0\left(y^{-1}\dot{G} - \frac{1}{2}y^{-4}G^2\right). \tag{10.19}$$

Dalla (10.18),

$$\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i = v^{-3}G(t)\mathbf{r},$$

cosicché $G \geq 0$ e

$$v = r^{-2}G \quad , \quad v = \dot{r}. \tag{10.20}$$

Dalla (10.20),

$$G = \dot{y}y^2 \quad , \quad \dot{G} = \ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y$$

e, sostituendo nella (10.19), otteniamo

$$y\ddot{y} + \frac{3}{2}\dot{y}^2 = \frac{1}{\rho_0}(P - p_0).$$

Questa é appunto l'equazione desiderata.