

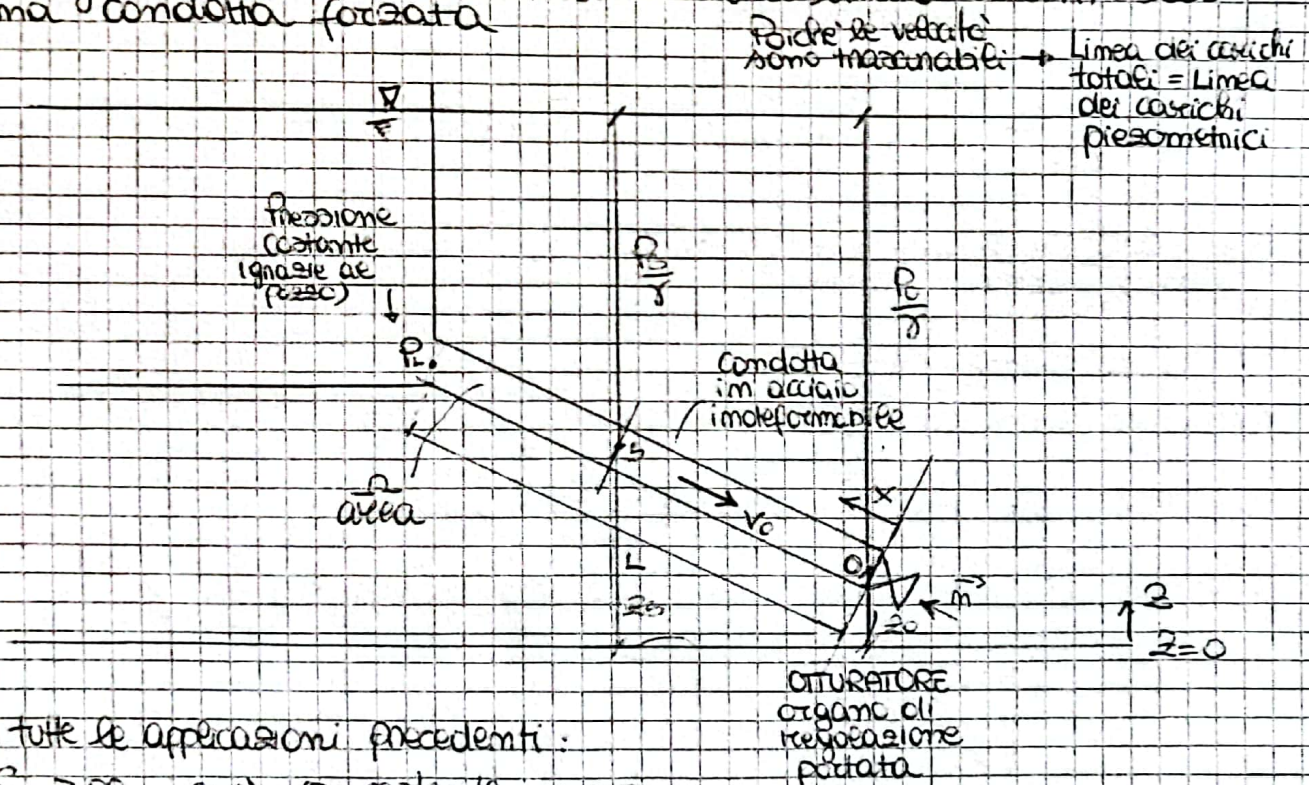
MOTO VARIO NELLE CORRENTI IN PRESSIONE

Per quanto riguarda gli impianti idroelettrici, studieremo nei dettagli quelli a piccola portata e grandi salti. Questi impianti possono essere dotati di una pompa che realizza, durante le ore notturne, l'acqua all'invaso principale.

Il pozzo, già citato, ha un ruolo importante all'avviamento e in fase di chiusura. All'avviamento fornisce l'acqua per raggiungere la massima potenza disponibile. Nel caso di manovre brusche, il pozzo ha una funzione altrettanto importante poiché consente delle sovrappressioni (COLPI DI ARIETE) che agiscono sulla condotta forzata. La condotta forzata viene dimensionata tenendo conto di questo fenomeno. Lo scopo di questo capitolo è quello di quantificare le sovrappressioni.

—

Immaginiamo di avere un serbatoio a livello costante ed una condotta forzata.



In tutte le applicazioni precedenti:

$$E \rightarrow \infty \quad \text{cioè} \quad \rho = \text{costante} \quad c \rightarrow \infty$$

Nel caso del corpo d'ariete non è possibile prescindere dalla compressibilità del fluido.

Supponiamo che l'acqua stia scorrendo con velocità v_0 ed eseguiamo una manovra di chiusura.

IPOTESI DI FLUIDO INCOMPRESSIBILE, CHIUSURA ISTANTANEA E CONDOTTA IN ACCIAIO (tutta la massa).

$$m = \rho \cdot A \cdot L$$

Per calcolare le sovrappressioni applichiamo il 2° degli impulsi.

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Deriva dalla II legge della dinamica.

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} dt = m d\vec{v}$$

una forza applicata per un certo tempo provoca la variazione della quantità di moto

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_F - \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_f = \vec{0}$$

$$\underbrace{\Delta p}_{\vec{F}} \underbrace{\Omega}_{m} dt = \underbrace{\rho}_{m} \underbrace{L}_{\Delta \vec{v}} (\vec{v}_f - \vec{v}_i)$$

$$\Delta p \Omega \vec{m} dt = \rho \Omega L (0 - \vec{v}_0)$$

$$\Delta p \Omega \vec{m} dt = \rho \Omega L (-\vec{v}_0)$$

$$\Delta p \Omega \vec{m} dt = \rho \Omega L \vec{m} \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_0 = -\frac{\vec{m}}{t} \vec{v}_0$$

opposto al vettore $\vec{m}$

$$\Delta p = \frac{\rho L v_0}{dt}$$

SOUAPPRESSIONE CHE NASCE
A CAUSA DI UNA MANOVRA BRUSEI

Nel caso di fluido incomprimibile, istantaneamente l'energia cinetica verrebbe convertita in energia di pressione
vale a dire:

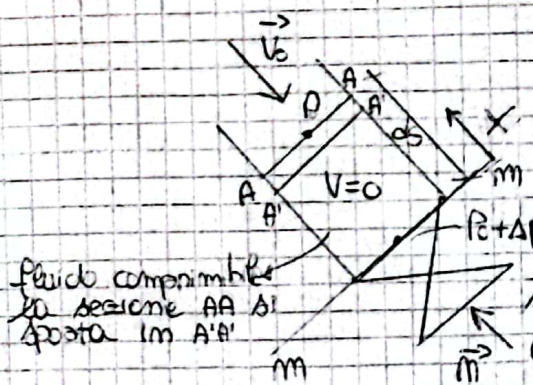
$$dt = 0$$

$$\Delta p \rightarrow \infty$$

Nessuna condotta resisterebbe alle souappressioni

per tale ragione va considerata la comprimibilità

Vediamo cosa succede alla massa fluida comprimibile



$t=0$ operazione brusca

$t=dt$ una sola porzione di massa si ferma e la restante massa continua a remolare

La sezione AA si comprime e si sposta a AA'

souappressione che nasce perché si crea una massa infinitesimale

$$\vec{F} dt = dm \Delta \vec{v}$$

$$(p_e + \Delta p) \vec{m} \Omega - p_e \vec{m} \Omega = \vec{F}$$

Applichiamo il teorema degli impulsi

$$\Delta p \vec{m} \Omega dt = \rho \Omega dS (\vec{v}_F - \vec{v}_0)$$

$$\Delta p \vec{m} dt = \rho ds V_0 \vec{m}$$

$$\Delta p = \frac{\rho ds V_0}{dt}$$

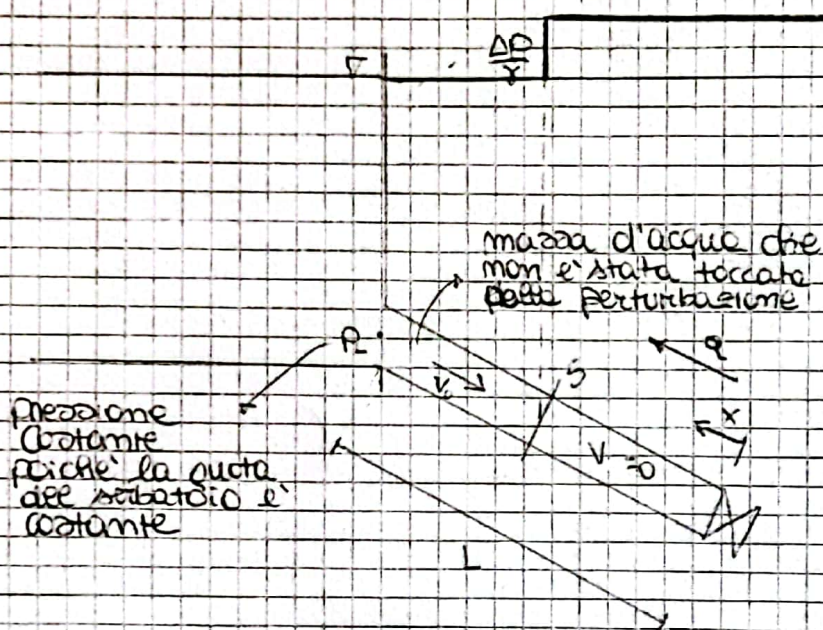
ha le dimensioni di una velocità
CELERITA' DI PERTURBAZIONE

$$a = \frac{ds}{dt} \approx 1000 \text{ m/s}$$

Si propaga
a partire
dall'otturatore
verso l'imbocco

Dopo un tempo $t = \frac{L}{a}$ la perturbazione
raggiunge l'imbocco

Amdamento longitudinali



$$t = \frac{s}{a}$$

Dopo un tempo
 t la perturbazione
raggiunge la
sezione S

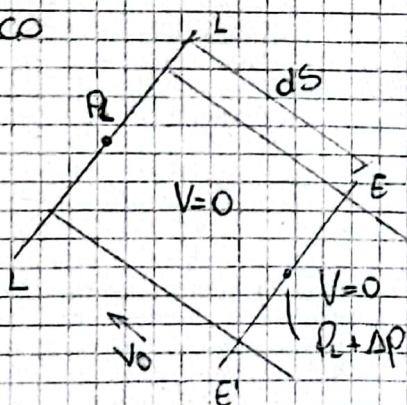
Tutte le masse
di acqua che
vengono toccate
dalla perturbazione
si fermano, si
comprimono e
creano la pressione

$$\Delta p = \rho a V_0$$

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{\rho a V_0}{\gamma} = \frac{a V_0}{g}$$

SURCARICO CHE
NASCE

IMBOCCO



Dopo un tempo $t = \frac{L}{a}$ la perturbazione
raggiunge l'imbocco

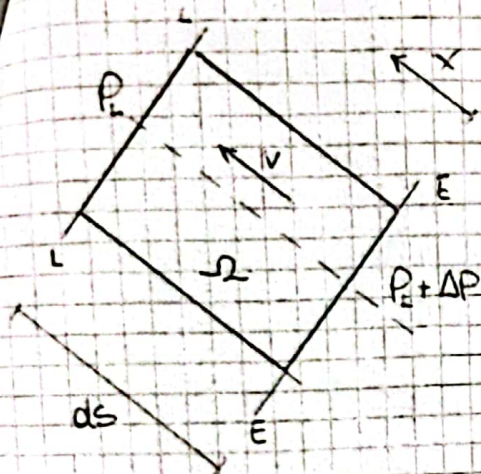
Consideriamo una sezione
a distanza ds

$$\text{Al tempo } t = \frac{L}{a} + dt$$

la massa compresa tra
LL e EE tende a spostarsi
verso l'imbocco

Vi è uno squilibrio di forze legato alla compressione nella
sezione EE e quindi questo volume tende a spostarsi verso
l'imbocco con una velocità V che bisogna calcolare

Per calcolare la velocità V si applica il teorema degli impulsi



Applichiamo il teorema degli impulsi per ricavare V

$$\vec{F} dt = dm \Delta \vec{V}$$

$$\vec{F} dt = \rho \Omega dS (\vec{V}_F - \vec{V}_i)$$

$$\Delta p \Omega dS dt = \rho \Omega dS (\vec{V}_F - \vec{0})$$

Proiettiamo tutto sull'asse x

$$\Delta p \Omega dt = \rho \Omega dS V_F$$

Poiché $\Delta p > 0$ allora $V_F > 0$ cioè la velocità è diretta come x (il volume tende a muoversi verso l'imbarco)

$$V_F = \Delta p \frac{dt}{dS} \frac{1}{\rho} = \frac{\rho a V_0}{\rho} \frac{dt}{dS} \quad a = \frac{ds}{dt}$$

$$V_F = V_0$$

La velocità finale è uguale e opposta a quella iniziale (di moto permanente)

Il volumetto al tempo $t = \frac{L}{a} + dt$ si sta decomprimendo e torna al suo volume iniziale e la sovrappressione torna ad essere pari a zero

Al tempo $2\frac{L}{a}$ la perturbazione toccherà nuovamente l'otturatore

$$\frac{L}{a} < t < 2\frac{L}{a}$$

La condotta forzata è divisa in due parti: la parte a contatto con l'otturatore si muove con velocità $-V_0$ (decompressione) e $\Delta p = 0$.

La restante massa che non è stata toccata dalla perturbazione ha una sovrappressione Δp e rimane ferma.

$$t = 2\frac{L}{a}$$

La perturbazione è arrivata all'otturatore e le particelle tendono a staccarsi dall'otturatore

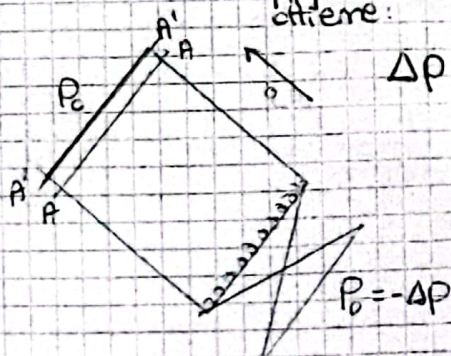
$$t = 2\frac{L}{a} + dt$$

La massa d'acqua tende a dilatarsi, la velocità passa da $-V_0$ a 0.

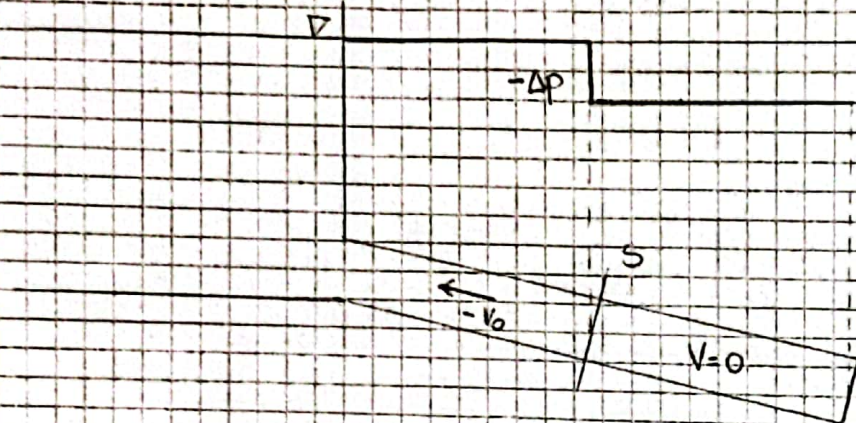
Nasce un ΔV . Applicando il teorema degli impulsi si ottiene:

$$\Delta p = -\rho a V_0$$

Nasce una perturbazione di velocità a che si muove nuovamente verso l'imbarco

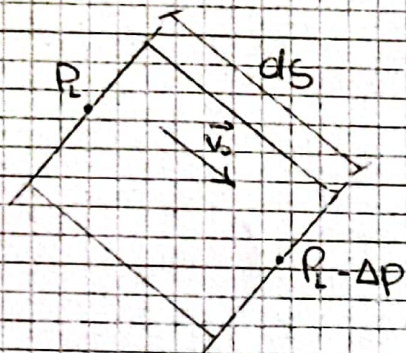


$$\frac{2L}{a} < t < \frac{3L}{a}$$



$$t = \frac{3L}{a}$$

La perturbazione è attivata, nuovamente, all'imbocco



Vi è uno squilibrio di forze (pressione minore in basso)

La massa tende a muoversi verso l'ottunatore con la velocità di moto permanente

Applicando il teorema degli impulsi a:

$$t = \frac{3L}{a} + dt$$

Le sovrappressioni si annullano

$$t = \frac{4L}{a}$$

La perturbazione è attivata, nuovamente, all'ottunatore

$$t = \frac{4L}{a} + dt$$

Situazione analoga a $0 + dt$

Questo fenomeno, idealmente, si ripete ciclicamente con un periodo pari a $\frac{4L}{a}$

Tenendo conto dello smorzamento e della deformabilità della condotta, il fenomeno subisce uno smorzamento

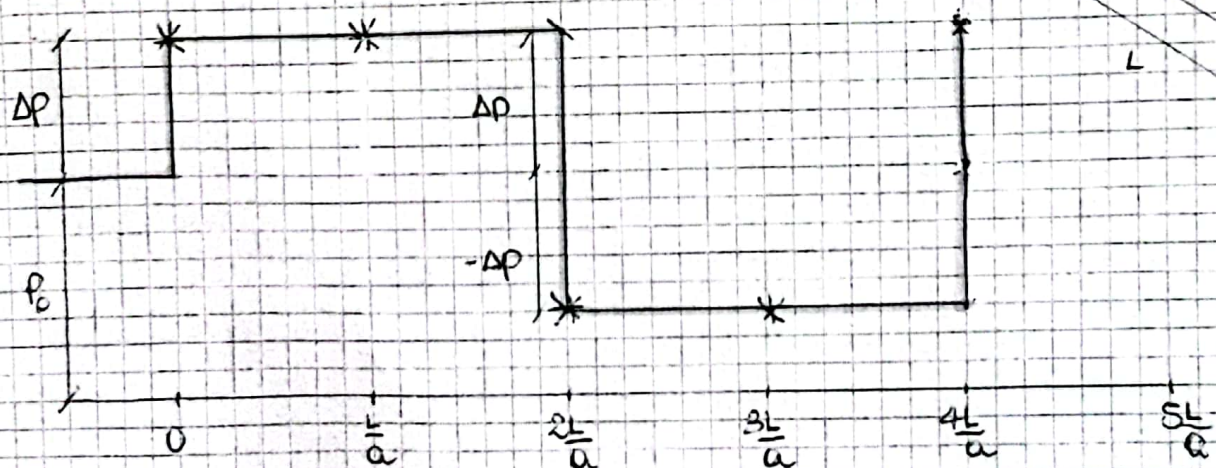
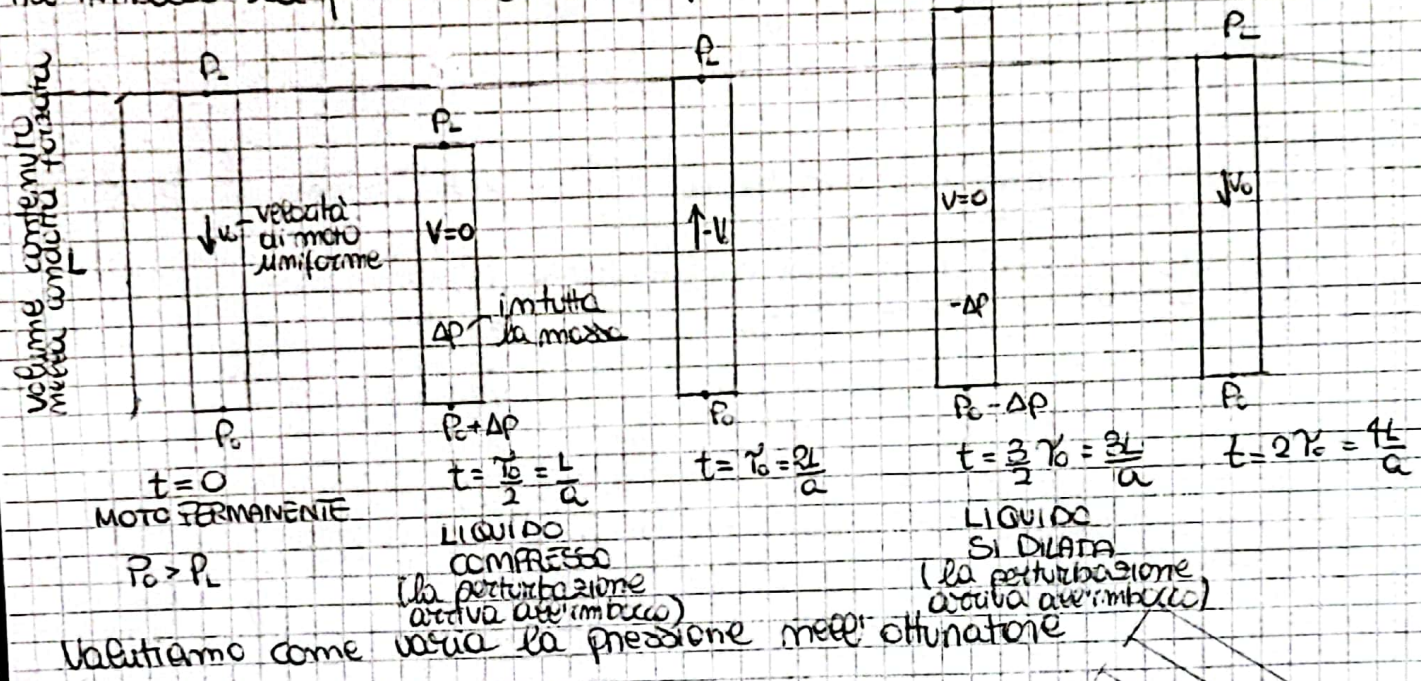
Estendo la massa è soggetta a fenomeni di COMPRESSIONE e DILATAZIONE e le soppressioni oscillano di $2\Delta p$

$$\gamma_0 = \frac{2L}{a}$$

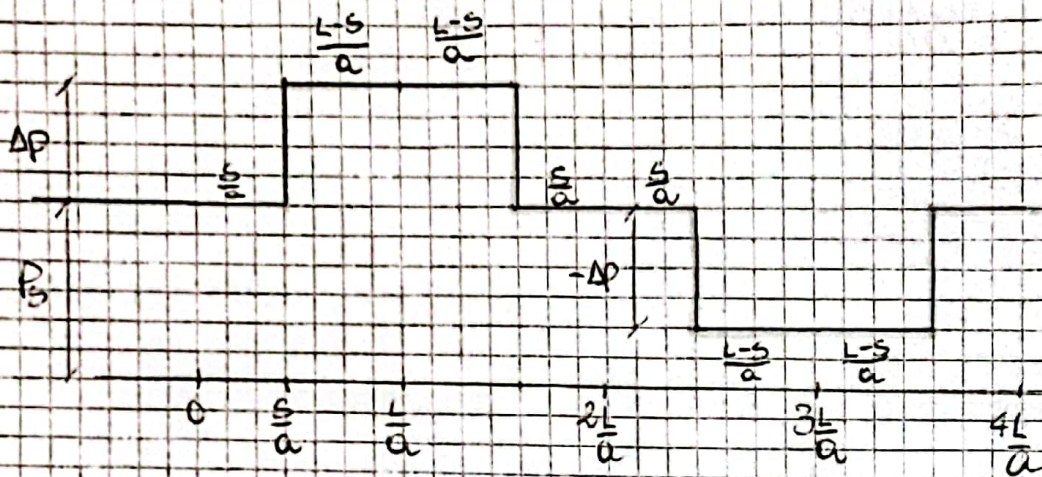
TEMPO DI FASE: tempo affinché la perturbazione raggiunga l'imbocco e ritorni all'otturatore

SCHEMATIZZIAMO L'INTERO PROCESSO → CHIUSURA ISTANTANEA OTTURATORE

Rappresentiamo la condotta forzata. All'imbocco la pressione è sempre P_L (costante)



Valutiamo come variano le pressioni in una generica sezione



La perturbazione con velocità a raggiunge la sezione S dopo un tempo $t = s/a$

La perturbazione dopo aver raggiunto la sezione S si ritorna dopo un tempo pari a $\frac{2(L-s)}{a}$

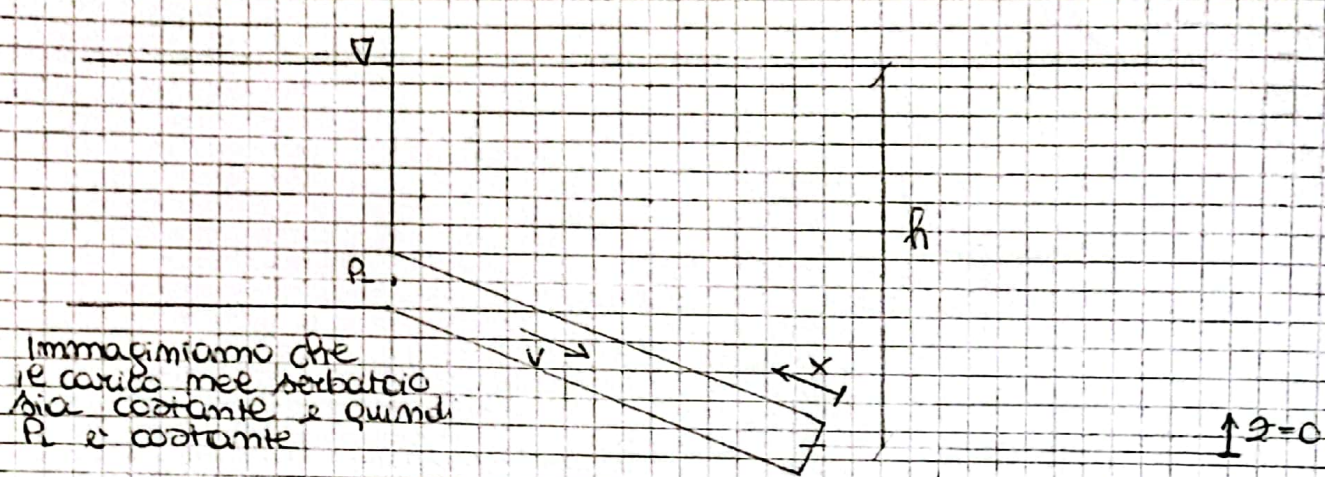
Il caso è paragonabile ad una molla che si comprime e si dilata

L'equazione è
valida per fluido
incomprimibile,
perfetto e per una
singola traiettoria

Poiché trattiamo
impianti a piccola
portata e grande
salto si può conside-
rare liquido
perfetto

TRATTAZIONE ANALITICA DEL PROBLEMA

Supponiamo che la chiusura dell'otturatore non sia istantanea bensì che vi sia una legge qualsiasi. Consideriamo la sotto condotta di lunghezza $2L$ e sezione Ω .



Studiamo un moto vario ovvero un moto in cui i parametri variano nello spazio e nel tempo.

Nel caso di moto vario, precedentemente, è stata utilizzata l'equazione

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{v^2}{2g}$$

Generica sezione S che si trova a distanza x dall'otturatore

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

Lo scopo è valutare come varia il carico piezometrico

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right) = -\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} \rightarrow \text{velocità aumentata}$$

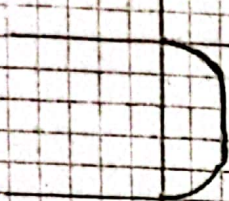
Questa relazione vale per un liquido perfetto e questa ipotesi vale ancora perché stiamo trattando impianti a piccola portata e grande salto.

Vale per un fluido incomprimibile e per una particella che si muove lungo una linea di corrente o indifferenza.

Tuttavia dobbiamo gestire una corrente e non la singola particella, inoltre il fluido è comprimibile.

Nel caso di fluidi reali il moto è TURBOLENTO. Questo si distingue parecchio da quello laminare.

ANDAMENTO VELOCITA' (diagramma appiattito)



Poiché $V_m \approx V_{max}$
l'equazione si può estendere alla corrente

In questo caso la velocità puntuale si discosta poco da quella media.

↓
Quindi l'equazione precedente può essere applicata ad un fluido incomprimibile (dove si trascurano le perdite di carico) e quindi ad una corrente che si muove lungo la condotta.

Tuttavia vi è un altro problema → se fluido non è incomprimibile

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{dV}{dt}$$

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

$$\gamma = \rho g \quad \text{in un fluido comprimibile } \rho \neq \text{cost}$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial (p/\gamma)}{\partial s}$$

la comprimibilità appare qui

γ varia soltanto con la densità. Si può sostituire la ∂ con d cioè derivata parziale con derivata tot.

$$\frac{\partial (p/\gamma)}{\partial s} = \frac{d (p/\gamma)}{ds}$$

$$\frac{d (p/\gamma)}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds}$$

VALE PER UN FLUIDO INCOMPRESSIBILE

$$\frac{d (p/\gamma)}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} - \frac{1}{\gamma^2} p \frac{d\gamma}{ds}$$

VALE PER UN FLUIDO COMPRESSIBILE

$$\begin{aligned} \frac{d (p/\gamma)}{ds} &= \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} - \frac{p}{\gamma^2} \frac{d\gamma}{ds} \frac{dp}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} \left(1 - \frac{p}{\gamma} \frac{d\gamma}{dp} \right) = \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} \left(1 - \frac{p}{\rho g} \frac{d\rho}{dp} \right) = \text{costante} \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} \left(1 - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \right) \end{aligned}$$

Il problema della comprimibilità si risolve con la seguente dimostrazione ↓

MODULO DI ELASTICITA' A COMPRESSIONE CUBICA

$$E = \rho \frac{dp}{d\rho}$$

$$\frac{d (p/\gamma)}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} \left(1 - \frac{p}{E} \right)$$

Nel caso di acqua $E = 2 \cdot 10^8 \text{ Kg/m}^2$

$$\frac{p}{E} = \frac{100}{10^4 \cdot 2 \cdot 10^8} = \frac{1}{200} = 0.005$$

$p = 100 \text{ Kg/cm}^2$ (pressioni di esercizio impianto idroelettrico)

↳ valore trascurabile diviso all'unità

$$\frac{d (p/\gamma)}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds}$$

VALIDA PER FLUIDO COMPRESSIBILE

ANDAMENTO VELOCITA' (diagramma appiattito)



Poiché $V_m \approx V_{puntuale}$
l'equazione si può estendere
alla corrente

In questo caso la
velocità puntuale
si discosta poco da
quella media



Quindi l'equazione
precedente può essere
applicata ad un fluido
incompressibile (dove si
trascurano le perdite di
carica) e quindi ad
una corrente che si
muove lungo la condotta

Tuttavia vi è un altro problema → se fluido non è incompressibile

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{dV}{dt}$$

$$h = z + \frac{P}{\gamma}$$

$\gamma = \rho g$ in un fluido
compressibile
 $\rho \neq \text{cost}$

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial (P/\gamma)}{\partial s}$$

la
compressibilità
appare qui

γ varia
sostanzialmente con
la pressione si può sostituire la ∂ con d
con derivata parziale con derivata tot.

$$\frac{\partial (P/\gamma)}{\partial s} = \frac{d (P/\gamma)}{ds}$$

$$\frac{d (P/\gamma)}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{ds}$$

VALE PER UN FLUIDO INCOMPRESSIBILE

$$\frac{d (P/\gamma)}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{ds} - \frac{1}{\gamma^2} P \frac{d\gamma}{ds}$$

VALE PER UN FLUIDO COMPRESSIBILE

$$\frac{d (P/\gamma)}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{ds} - \frac{P}{\gamma^2} \frac{d\gamma}{ds} \frac{dP}{dP} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{ds} \left(1 - \frac{P}{\gamma} \frac{d\gamma}{dP} \right)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{ds} \left(1 - \frac{P}{\rho g} \frac{d\rho}{dP} \right) = \text{costante}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{ds} \left(1 - \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \right)$$

Il problema della
compressibilità
si risolve con
la seguente
dimostrazione ↓

MODULO DI ELASTICITA' A COMPRESSIONE CUBICA

$$E = \rho \frac{dP}{d\rho}$$

$$\frac{d (P/\gamma)}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{ds} \left(1 - \frac{P}{E} \right)$$

Nel caso di acqua

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ Kg/m}^2$$

$$\frac{P}{E} = \frac{100}{10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^8} = \frac{1}{200} = 0,005$$

$\rho = 100 \text{ Kg/cm}^3$ (pressioni di esercizio
improntato
idroelettrico)

↳ valore trascurabile
diviso all'unità

$$\frac{d (P/\gamma)}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{ds}$$

VALIDA PER FLUIDO
COMPRESSIBILE

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right)$$

VALE PER UN FLUIDO
COMPRESSIBILE

L'argomento di ogni grandezza è del tipo:

$$t \pm \frac{x}{a} \rightarrow \text{ascissa}$$

$$a \rightarrow \text{celerità perturbazione}$$

Nel caso di pompanti ad alta caduta e piccola portata i termini spaziali si possono trascurare

$$v = v(t \pm \frac{x}{a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v'$$

$$v \frac{\partial v}{\partial s} = v v' \left(\pm \frac{1}{a} \right) = v' \left(\pm \frac{v}{a} \right)$$

↳ termine trascurabile

Le velocità v non sono elevate

$$v = 3 \div 4 \text{ m/s}$$

$$a = 1000 \text{ m/s}$$

→ $\frac{v}{a}$ termine molto piccolo

Perciò:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

Si può sostituire la coordinata x al posto di s
Togliamo le meno poiché v ha verso opposto alla x

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

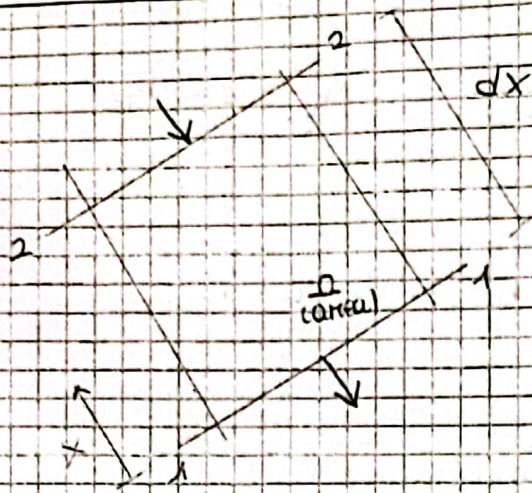
EQUAZIONE DEL MOTO
(nel caso del colpo d'ariete)

↓

Non è sufficiente a risolvere il problema.
Le due incognite sono la variabilità di h e quella di v
nel spazio e nel tempo

Si introduce l'equazione di continuità

Isoliamo un volumetto infinitesimo tra due sezioni



Nel tempo dt la massa che entra attraverso 2-2 meno la massa che esce attraverso 1-1 deve uguagliare la variazione di massa nel tempo dt per effetto della variazione di densità (fluido comprimibile)

MASSA $\rho Q dt$

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$\rho Q dt$ SEZIONE 1 (massa entrante)

$\rho Q dt + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx dt$ SEZIONE 2 (massa entrante)

$\frac{\partial \rho}{\partial x} dx dt = \frac{\partial \rho \cdot \text{VOLUME}}{\partial t} dt$

$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

$Q = V \cdot \rho$

$\frac{\partial (\rho \cdot V)}{\partial x} = \frac{\partial (\rho \cdot V)}{\partial t}$ Sono tutte grandezze variabili nello spazio e nel tempo

$\rho \cdot V \frac{\partial V}{\partial x} + \rho \left(V \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left(V \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial t}$

Ricordiamo che le velocità nel nostro caso sono piccole e le variazioni spaziali possono essere trascurate rispetto a quelle temporali.

$\rho \cdot V \frac{\partial V}{\partial x} = \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial t}$

$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$

poiché ρ e p dipendono da T si introduce la dipendenza

$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}$

$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)$

→

$$\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial P} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dP} = \frac{1}{\epsilon} \rightarrow \text{modulo di elasticità cubica a compressione}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial t} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial P} \right)$$

Lo scopo è valutare la variazione di h nel tempo

$$h = z + \frac{P}{\gamma} \rightarrow P = \gamma(h - z)$$

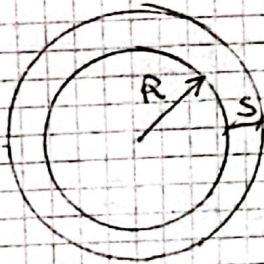
$$\frac{\partial P}{\partial t} = \gamma \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{nel caso di impianti a piccola caduta si può trascurare la variabile di } \gamma$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \gamma \frac{\partial h}{\partial t} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial P} \right) \rightarrow \Omega \text{ varia solo con } P$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial P} = \frac{d\Omega}{dP}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \gamma \frac{\partial h}{\partial t} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dP} \right)$$

Ω è la sezione
Consideriamo un tubo di raggio R e spessore S



$$\Omega = \pi R^2$$

$$d\Omega = 2\pi R dR$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \gamma \frac{\partial h}{\partial t} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\pi R^2} 2\pi R \frac{dR}{dP} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \gamma \frac{\partial h}{\partial t} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{2}{R} \frac{dR}{dP} \right)$$

$\frac{dR}{dP}$ ci dice come varia il raggio con la pressione (varia perché la condotta è deformabile)

FORMULA DI MARICOTTE

$$S = \frac{PD}{2\sigma} = \frac{PR}{\sigma} \rightarrow \text{tensione ammissibile acciaio} \quad \sigma' = \frac{PR}{S}$$

$$\frac{dS}{dP} = \frac{d\sigma'}{dP} = \frac{R}{\sigma'}$$

allungamento unitario

$$dR = dS \cdot R = \frac{R^2 dP}{\sigma' E} \rightarrow \frac{dR}{dP} = \frac{R^2}{\sigma' E}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \gamma \frac{\partial h}{\partial t} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{2}{R} \frac{R^2}{\sigma' E} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \gamma \frac{\partial h}{\partial t} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{D}{\sigma' E} \right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} + \frac{D}{\sigma' E}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{\rho g} \left[\frac{1}{\frac{E}{\rho} \left(1 + \frac{ED}{SE} \right)} \right]$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{g} \frac{\frac{E}{\rho}}{1 + \frac{ED}{SE}}$$

$$a^2 = \frac{\frac{E}{\rho}}{1 + \frac{ED}{SE}}$$

$$a = \sqrt{\frac{\frac{E}{\rho}}{1 + \frac{ED}{SE}}} \rightarrow \text{celerità delle perturb. più piccole}$$

$\sqrt{1 + \frac{ED}{SE}} \rightarrow$ termine riduttivo che tiene conto della deformabilità della condotta (maggiore di 1)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Pertanto il sistema è il seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Deriviamo le due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

EQUAZIONE DI D'ALEMBERG O DELLE CORDE VIBRANTI (eq. differenziale di II grado)

La soluzione dell'equazione è nota

$$\Delta h = h - h_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

carico nella sezione generica

carico in condizione di moto permanente

$\rightarrow$ valore costante

Per ottenere la velocità si integra

$$\frac{\partial h}{\partial x} = F'\left(-\frac{1}{a}\right) - f'\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{a} (F' + f') \quad \text{ma} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{a} (F' + f')$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{g}{a} (F' + f')$$

Integriamo rispetto al tempo:

$$V - V_0 = -\frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right]$$

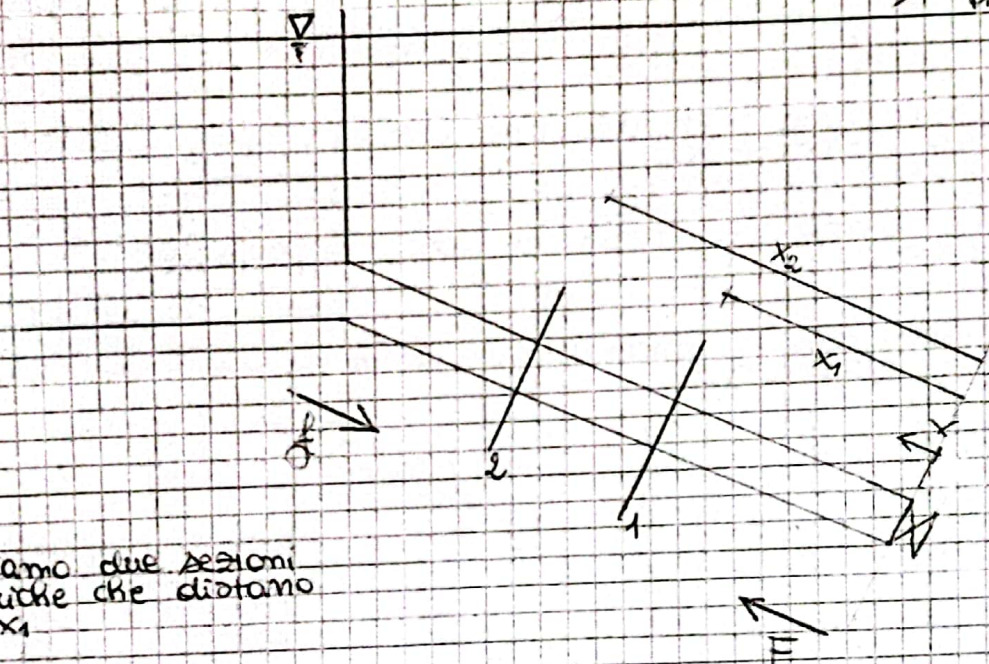
INTEGRALE GENERALE
DELLA VELOCITA'

I due integrali sono fondamentali poiché formano l'andamento del suono e della velocità in una sezione di acqua x

Bisogna capire cosa sono le funzioni F e f di argomento $\left(t - \frac{x}{a}\right)$ e $\left(t + \frac{x}{a}\right)$

Tracciamo lo schema dell'impianto:

FLUIDO IDEALE
LINEA CARICHI
TOT = LINEA CARICHI
PIEZOMETRICI



Scegliamo due sezioni
generiche che distano
 $x_2 - x_1$

$t=0$ CHIUSURA OTTURATORE

$t < 0$ MOTO PERMANENTE $h = h_0$ $F = f = 0$

x_1, t_1 all'ascissa x_1 associamo il tempo t_1

x_2, t_2

La funzione F dovrà assumere lo stesso valore lungo tutte le sezioni

$$F\left(t_1 - \frac{x_1}{a}\right)$$

$$F\left(t_2 - \frac{x_2}{a}\right)$$

Affinché le due funzioni siano uguali, le devono essere gli argomenti

$$t_1 - \frac{x_1}{a} = t_2 - \frac{x_2}{a}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{a}$$

$$a > 0$$

$$x_2 - x_1 > 0$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 > 0$$

F rappresenta una perturbazione che nasce nell'otturatore e si propaga verso l'imbocco assumendo lo stesso valore

Quanto tempo la perturbazione f raggiunge S ?

$$t = \frac{L}{a} + \frac{L-x}{a} = \frac{2L}{a} - \frac{x}{a}$$

andata ritorno

Ci sono degli istanti di tempo in cui agisce solo la funzione F ed altri in cui agiscono le funzioni F e f

$$0 < t < \frac{x}{a}$$

MOTO PERMANENTE IN S

$$\frac{x}{a} < t < \frac{2L-x}{a}$$

FASE DI COLPO DIRETTO
SU S SI RISENTONO SOLTANTO
GLI EFFETTI DI F

$$t \geq \frac{2L-x}{a}$$

FASE DI CONTRACOLPO
COESISTONO GLI EFFETTI DI F E f

La fase di colpo diretto è la più gravosa ed è la più facile da gestire

FASE DI COLPO DIRETTO

Nella sezione S non è ancora arrivata la funzione f

$$h-h_0 = F(t - \frac{x}{a}) - f(t + \frac{x}{a})$$

$$V-V_0 = -\frac{g}{a} [F(t - \frac{x}{a}) + f(t + \frac{x}{a})]$$

$$h-h_0 = F(t - \frac{x}{a})$$

$$V-V_0 = -\frac{g}{a} [F(t - \frac{x}{a})]$$

$$F(t - \frac{x}{a}) = -\frac{a}{g} (V-V_0) = \frac{a}{g} (V_0 - V)$$

$$h-h_0 = \frac{a}{g} (V_0 - V)$$

SARACARICO IN FASE DI COLPO DIRETTO

$$a \approx 1000 \text{ m/s}$$

$$V_0 = 2 \div 3 \text{ m/s}$$

$$g \approx 10 \text{ m/s}^2$$

$$\rightarrow h-h_0 = 100 (V_0 - V)$$

Il saracario è 100 volte la velocità perduta in fase di colpo diretto

Spostiamoci all'ottimazione

$$x=0 \quad t = \frac{2L}{a} \quad \text{durata fase di colpo diretto}$$

ma per essere precisi
poiché al tempo

$$t = \frac{2L}{a} \quad \text{arriva } f$$

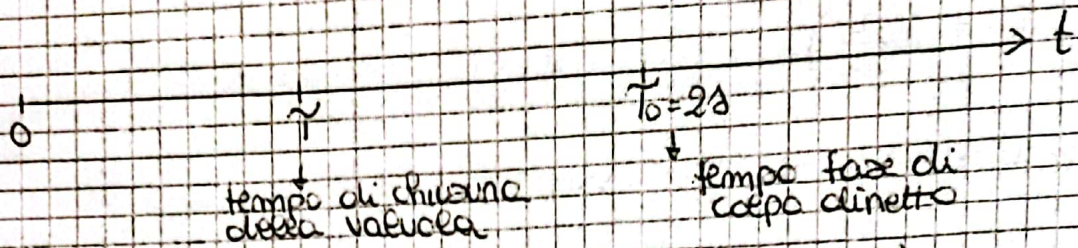
$$t = \frac{2L}{a} - dt$$

$\rightarrow$ infinitesimo

Per semplicità si pone $\gamma_0 = \frac{2L}{a}$

$$\text{se } L = 1000 \text{ m} \quad \gamma_0 = 2 \text{ s}$$

Rappresenteremo l'asse dei tempi



Supponiamo che $\gamma < \frac{2L}{a}$ (manovra brusca)

Al tempo γ la velocità dell'acqua all'otturatore è nulla

$$h - h_0 = \frac{a}{g} (V_0 - V)$$

$$h - h_0 = \frac{a}{g} V_0 = 100 V_0$$

$$\Delta h_{\max} = \frac{a V_0}{g}$$

MASSIMO
SQUARCARICO
per $\gamma < \frac{2L}{a}$

$$\Delta p_{\max} = \rho V_0 a$$

MASSIMA
SOPRAPPRESSIONE
(relazione già
ottenuta con
andamento
qualitativo)

Se $\gamma < \frac{2L}{a}$

MANOVRE BRUSCHE

↓
producono tutti lo stesso effetto
in termini di Δh e Δp

Se $\gamma \geq \frac{2L}{a}$

MANOVRE LENTE

↓
non siamo più in fase di colpo diretto
e bisogna tenere conto anche di f
↓
situazione meno grave

All'imbocco il livello rimane sempre costante e anche la
pressione e quindi anche il carico
 $X=L$ $h=h_0 \Rightarrow \Delta h=0$

$$h - h_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad \text{vale per un'arbitraria generica}$$

$$h - h_0 = F\left(t - \frac{L}{a}\right) - f\left(t + \frac{L}{a}\right)$$

$$F\left(t - \frac{L}{a}\right) = f\left(t + \frac{L}{a}\right)$$

Questo vuol dire che nel momento in cui arriva la
perturbazione F all'imbocco, nasce una perturbazione f
uguale e opposta

$$F\left(t - \frac{L}{a} + \frac{L}{a}\right) = f\left(t + \frac{L}{a} + \frac{L}{a}\right) \Rightarrow F(t) = f\left(t + \frac{2L}{a}\right)$$

Questo vuol dire che all'ottunatore (cioè per $x=0$) le due perturbazioni sono uguali e sfasate di $\frac{2L}{a}$

Questo è coerente con il fatto che la perturbazione f arriva all'ottunatore dopo un tempo $t = \frac{2L}{a}$

$$f(t) = F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \quad \text{equivalente} \quad F(t) = f\left(t + \frac{2L}{a}\right)$$

f è in ritardo di $\frac{2L}{a}$ rispetto a F

F è in anticipo di $\frac{2L}{a}$ rispetto a f

Pertanto si può scrivere:

all'ottunatore $x=0$ si hanno le condizioni più generali

$$h - h_0 = F(t) - f(t) = F(t) - F\left(t - \frac{2L}{a}\right)$$

$$V - V_0 = -\frac{g}{a} \left[F(t) + F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \right]$$

Consideriamo degli istanti di tempo sfasati di $\frac{2L}{a}$

$$t_1 \leq \frac{2L}{a}, \quad t_2 = t_1 + \frac{2L}{a}, \quad t_3 = t_2 + \frac{2L}{a}$$

Esprimiamo gli integrali generali e particolarizziamoli

$$\begin{cases} h_1 - h_0 = F(t_1) \end{cases} \rightarrow \text{siamo in fase di colpo diretto } f(t_1) = 0$$

$$\begin{cases} V_1 - V_0 = -\frac{g}{a} F(t_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_2 - h_0 = F(t_2) - F\left(t_2 - \frac{2L}{a}\right) = F(t_2) - F(t_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2 - V_0 = -\frac{g}{a} [F(t_2) + F(t_1)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_3 - h_0 = F(t_3) - F(t_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_3 - V_0 = -\frac{g}{a} [F(t_3) + F(t_2)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_4 - h_0 = F(t_4) - F(t_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_4 - V_0 = -\frac{g}{a} [F(t_4) + F(t_3)] \end{cases}$$

$$h_m - h_0 = F(t_m) - F(t_{m-1})$$

$$V_m - V_0 = -\frac{g}{a} [F(t_m) + F(t_{m-1})]$$

$$t_m = t_{m-1} + \frac{2L}{a}$$

Nel caso di colpo diretto

$$h - h_0 = \frac{a}{g} (V_0 - V_1) \quad t_1 \leq \frac{2L}{a}$$

Equazioni
valide per
l'ottunatore

Nel caso di contraccolpo sommiamo gli integrali generali del carico e sottraiamo quello della velocità

$$h_3 + h_2 - 2h_0 = F(t_3) - F(t_1)$$

$$V_2 - V_3 = -\frac{g}{a} [F(t_1) - F(t_3)]$$

Ricaviamo $F(t_3) - F(t_1)$ dalla seconda:

$$F(t_3) - F(t_1) = \frac{a}{g} (V_2 - V_3)$$

Sostituiamo alla prima:

$$h_3 + h_2 - 2h_0 = \frac{a}{g} (V_2 - V_3)$$

Dividiamo tutto per h_0 :

$$\frac{h_3}{h_0} + \frac{h_2}{h_0} - 2 = \frac{a}{g h_0} (V_2 - V_3)$$

$$\frac{h_3}{h_0} + \frac{h_2}{h_0} - 2 = \frac{V_0 a}{g h_0} \left(\frac{V_2}{V_0} - \frac{V_3}{V_0} \right)$$

In generale:

$$\frac{h_{i+1}}{h_0} + \frac{h_i}{h_0} - 2 = \frac{V_0 a}{g h_0} \left(\frac{V_i}{V_0} - \frac{V_{i+1}}{V_0} \right)$$

$$\frac{h_{i+1}}{h_0} + \frac{h_i}{h_0} - 2 = \frac{2 V_0 a}{2 g h_0} \left(\frac{V_i}{V_0} - \frac{V_{i+1}}{V_0} \right)$$

Poniamo: $\frac{a V_0}{2 g h_0} = d$ ↳ quadrato velocità forcellettonica
PARAMETRO DI ALIEVI

$$\frac{h_{i+1}}{h_0} + \frac{h_i}{h_0} - 2 = 2 d \left(\frac{V_i}{V_0} - \frac{V_{i+1}}{V_0} \right)$$

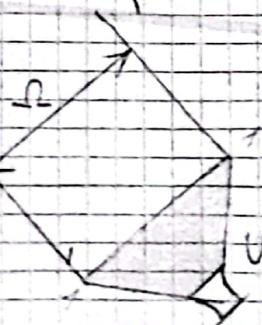
Poniamo: $z_i = \sqrt{\frac{h_i}{h_0}}$ $z_{i+1} = \sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_0}}$

$$z_{i+1}^2 + z_i^2 - 2 = 2 d \left(\frac{V_i}{V_0} - \frac{V_{i+1}}{V_0} \right)$$

V_i, V_{i+1} velocità che fanno riferimento a degli istanti di tempo

Relazione che ha come variabile il carico con la velocità ma a noi serve sapere come varia nel tempo in funzione al grado di apertura dell'attizzatore

Consideriamo la sezione terminale della condotta forzata dove si trova un uccello aperto con sezione W_0



$W_0 \rightarrow$ sezione tutta aperta (moto permanente)

Calcoliamo la portata di afflusso che fluisce attraverso la sezione contratta.

$$Q = \mu w_0 \sqrt{2gh_0}$$

↳ carico in corrispondenza della sezione finale

Applichiamo l'eq. di continuità nel volume colorato

$$V_0 \Omega = \mu w_0 \sqrt{2gh_0}$$

MOTO PERMANENTE

↓ ↓

portata che portata che

entra esce

Successivamente si inizia a parzializzare w_i e w_0 del moto vario. Bisogna tenere conto della comprimibilità del fluido e la portata che entra non è uguale a quella che esce ma il volume è piccolo perciò si può trascurare la comprimibilità.

$$V \Omega = \mu w \sqrt{2gh}$$

Rappettiamo le due equazioni:

$$\frac{V}{V_0} \frac{\Omega}{\Omega} = \frac{\mu w}{\mu w_0} \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh_0}} \rightarrow \frac{V}{V_0} = \frac{w}{w_0} \sqrt{\frac{h}{h_0}}$$

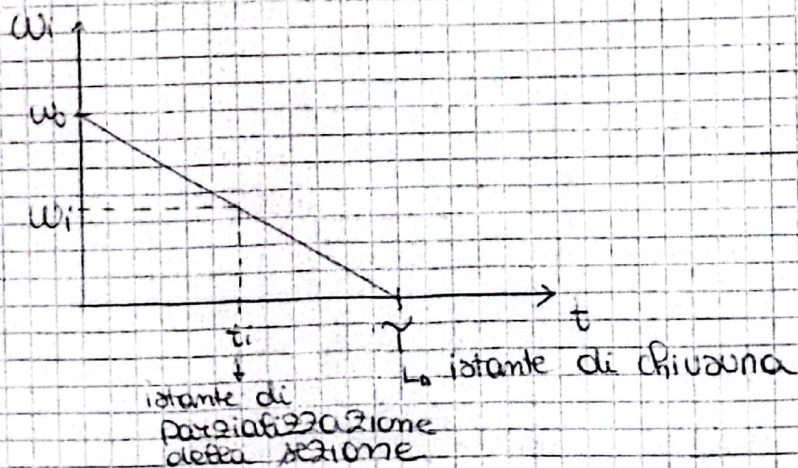
$$t_i \Rightarrow \frac{V_i}{V_0} = \frac{w_i}{w_0} \sqrt{\frac{h_i}{h_0}}$$

$$t_{i+1} \Rightarrow \frac{V_{i+1}}{V_0} = \frac{w_{i+1}}{w_0} \sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_0}}$$

Alla fine si ottiene:

$$z_{i+1}^2 + z_i^2 - 2 = 2d \left(\frac{w_i}{w_0} \sqrt{\frac{h_i}{h_0}} - \frac{w_{i+1}}{w_0} \sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_0}} \right)$$

Costruiamo questo grafico



$$\eta_i = \frac{w_i}{w_0}$$

GRADO DI APERTURA

$$\eta_{i+1} = \frac{w_{i+1}}{w_0}$$

$$z_{i+1}^2 + z_i^2 - 2 = 2d(\eta_i z_i - \eta_{i+1} z_{i+1})$$

EQUAZIONE DI
ALLIÉVI-MICHAUD

Permette di ricavare
l'andamento del
scuramento all'attenuazione
per istanti diversi

L'equazione è anche nota come

GENERICA EQUAZIONE
CONCATENATA PER IL
FENOMENO DEL COLPO
D'ARIETE

Valutiamo l'eq. per istanti di tempo diversi

$$t_1 = \frac{2L}{a}, t_2 = t_1 + \frac{2L}{a}, t_3 = t_2 + \frac{2L}{a}, t_4 = t_3 + \frac{2L}{a}, \dots$$

$$t_1 = \frac{2L}{a} \quad l=0 \quad z_1^2 + z_0^2 - 2 = 2d(\eta_0 z_0 - \eta_1 z_1) \quad \text{MOTO PERMANENTE}$$

$$\text{Ricordiamo che: } z_0 = \sqrt{\frac{h_0}{h_c}} = 1 \quad z_1 = \sqrt{\frac{h_1}{h_c}} \quad \eta_0 = \frac{a_0}{a_c} = 1$$

$$z_1^2 + 1 - 2 = 2d(1 - \eta_1 z_1)$$

$$t_2 = t_1 + \frac{2L}{a} \quad z_2^2 + z_1^2 - 2 = 2d(\eta_1 z_1 - \eta_2 z_2)$$

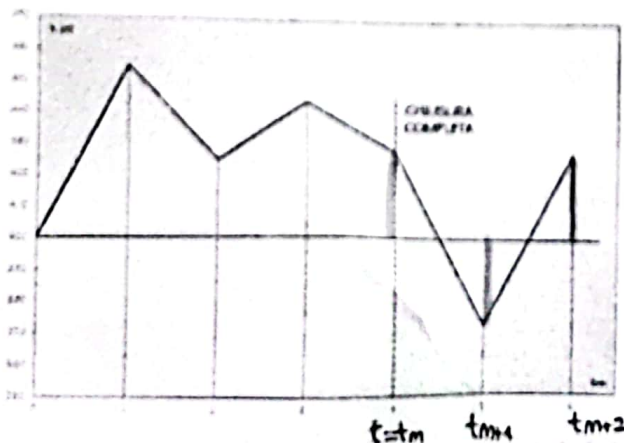
$$t_3 = t_2 + \frac{2L}{a} \quad z_3^2 + z_2^2 - 2 = 2d(\eta_2 z_2 - \eta_3 z_3)$$

$$t_m = t_{m-1} + \frac{2L}{a} \quad z_m^2 + z_{m-1}^2 - 2 = 2d(\eta_{m-1} z_{m-1} - \eta_m z_m)$$

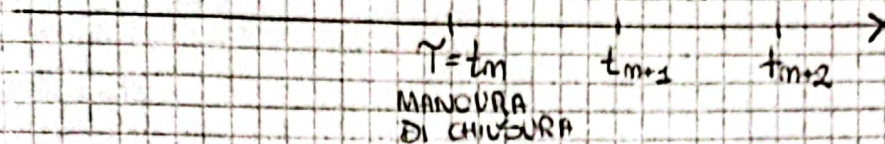
Si parla di equazioni concatenate perché dalla prima
equazione si ricava z_1 (si prende il valore positivo)
e da questo si ricava la seconda e così via

Queste equazioni ci permettono di ricavare l'andamento
del colpo

ANDAMENTO
SCLARIFICATO



Consideriamo l'asse dei tempi e l'istante di chiusura t_m



Cosa succede all'istante t_{m+1} e t_{m+2} ?

$$t_{m+1} = t_m + \frac{2L}{a}$$

$$t_{m+2} = t_m + \frac{4L}{a} = t_{m+1} + \frac{2L}{a}$$

Applichiamo l'eq. di conservazione

$$z_{m+1}^2 + z_m^2 - 2 = 2d(\eta'_m z_m - \eta'_{m+1} z_{m+1})$$

$$z_{m+2}^2 + z_{m+1}^2 - 2 = 2d(\eta'_{m+1} z_{m+1} - \eta'_{m+2} z_{m+2})$$

$$\eta_i = \frac{w_i}{w_0} \quad \text{quindi} \quad \eta_m = \frac{w_m}{w_0} = 0 \quad \text{perché} \quad w_m = 0 \quad \text{per} \quad t = t_m$$

$$\eta_{m+1} = \frac{w_{m+1}}{w_0} = 0 \quad // \quad w_{m+1} = 0 \quad \text{per} \quad t = t_{m+1}$$

$$\eta_{m+2} = \frac{w_{m+2}}{w_0} = 0 \quad // \quad w_{m+2} = 0 \quad \text{per} \quad t = t_{m+2}$$

Perciò l'eq. diventa:

$$z_{m+1}^2 + z_m^2 - 2 = 0 \quad \text{con} \quad z_{m+1} = \sqrt{\frac{h_{m+1}}{h_0}}$$

$$\frac{h_{m+1}}{h_0} + \frac{h_m}{h_0} - 2 = 0$$

$$h_{m+1} + h_m - 2h_0 = 0$$

$$h_{m+1} - h_0 = h_0 - h_m$$

$$h_{m+1} - h_0 = -(h_m - h_0) \quad t = t_{m+1}$$

Analogamente:

$$h_{m+2} - h_0 = -(h_{m+1} - h_0) \quad t = t_{m+2}$$

$$\begin{aligned} h_{m+2} - h_0 &= -(h_{m+1} - h_0) = \Rightarrow h_{m+2} - h_0 = h_m - h_0 & h_{m+1} - h_0 &= -(h_0 - h_m) \\ h_{m+1} - h_0 &= -(h_m - h_0) \end{aligned}$$

Al tempo t_{m+1} il sonnacchio è uguale & opposto a quello al tempo t_m (vedi grafico)

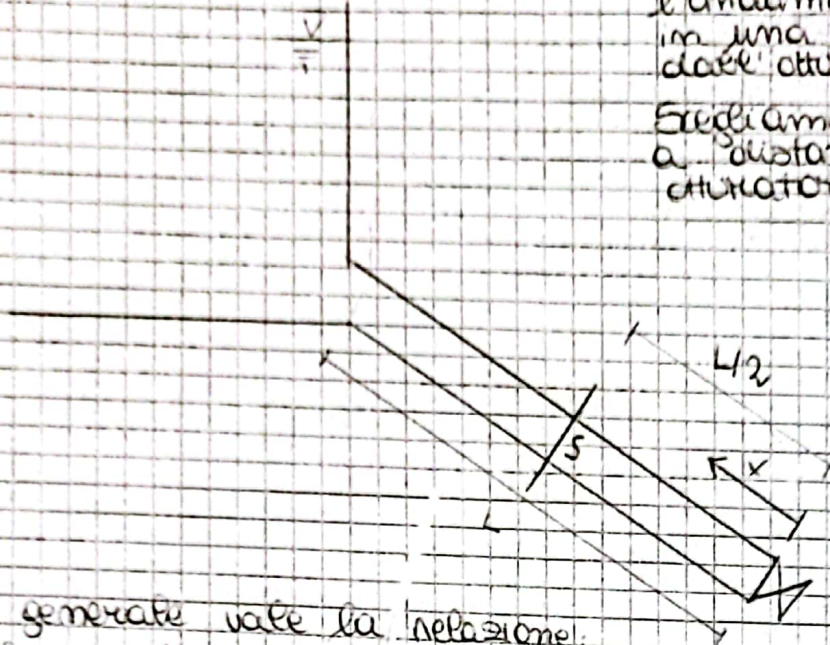
↳ ABBIAMO UN ANDAMENTO A DENTE DI SEGNALE (questo vale per i fluidi ideali)

Dopo che l'attizzatore è completamente chiuso i sonnacchi nelle fasi successive sono uguali e di segno contrario e assumono lo stesso valore in segno di due fasi in due fasi

L'equazione di Allievi è valida esclusivamente all'otturatore

E se volessimo conoscere l'andamento del sonnacchio in una sezione diversa dall'otturatore?

Scegliamo una sezione S a distanza $L/2$ dall'otturatore

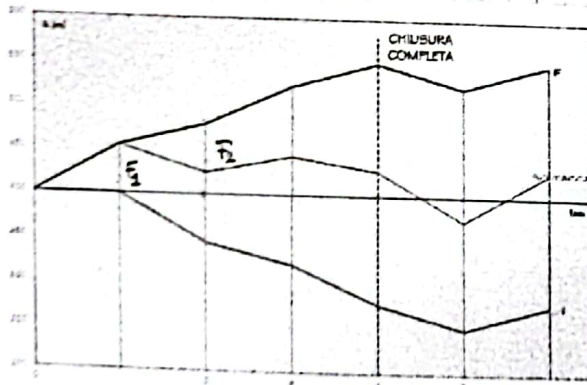


In generale vale la relazione:

$$h - h_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

L'obiettivo è calcolare le due funzioni a partire da quella che è nota all'otturatore

Ricordiamo l'andamento del sonnacchio all'otturatore ottenuto con la formula di Allievi, e costruiamo l'andamento di F e f



$$\begin{aligned} & -h \\ & -F \end{aligned}$$

$$h_1 - h_0 = F_1$$

$$t_1 = \frac{2L}{a}$$

$$h_2 - h_0 = F_2 - F_1$$

$$t_2 = t_1 + \frac{2L}{a}$$

$$h_3 - h_0 = F_3 - F_2$$

$$t_3 = t_2 + \frac{2L}{a}$$

$$h_4 - h_0 = F_4 - F_3$$

$$t_4 = t_3 + \frac{2L}{a}$$

$$F_2 = h_2 - h_0 + F_1$$

$$F_3 = h_3 - h_0 + F_2$$

Si può costruire l'andamento della funzione F all'otturatore a partire da questa si costruisce f (che deve essere fraziona di una fase)

Dopo aver tracciato l'andamento di F e f all'otturatore si chiede cosa succede alla sezione S

$t = \frac{L}{2a}$ dopo un tempo pari a $t = \frac{L}{2a}$ la perturbazione raggiunge S

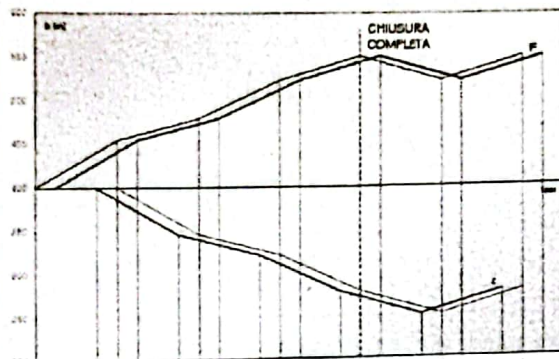
La curva che si riferisce ad F per l'otturatore viene tracciata di $\frac{2L}{2a}$ (curva più scura)

Analogamente si fa per f con la differenza che lo sfasamento è in anticipo rispetto all'otturatore

Perché per qualunque sezione

$$h - h_0 = F(t - \frac{x}{a}) - f(t + \frac{x}{a})$$

basta fare la somma dei due grafici per ottenere il grafico dell'andamento del fenomeno.



MASSIMO SURCARICO si ha all'otturatore in fase di colpo diretto

$$h - h_0 = F(t)$$

$$V - V_0 = -\frac{a}{g} F(t) \Rightarrow F(t) = \frac{a}{g} (V_0 - V)$$

$$h - h_0 = \frac{a}{g} (V_0 - V)$$

Mammine bruciate $\gamma < \frac{2L}{a}$ $h - h_0 = \frac{a}{g} V_0 \rightarrow \Delta h_{max} = \frac{a V_0}{g}$
 $\Delta p_{max} = \rho a V_0$

Mammine lente $\gamma \geq \frac{2L}{a}$ $h - h_0 = \frac{a}{g} (V_0 - V)$

$$h - h_0 = \frac{a}{g} V_0 \left(1 - \frac{V}{V_0}\right) = \frac{a}{g} V_0 \left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right) \rightarrow \text{Calcoliamo } \frac{V_0 - V}{V_0}$$

Similitudine tra triangoli:

Caso di variazione lineare di velocità (situazione più grave)

$$(V_0 - V) \frac{2L}{a} = V_0 : \gamma$$

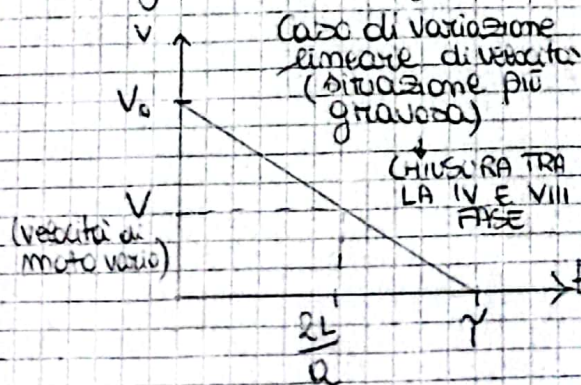
$$\frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{2L}{a \gamma}$$

$$h - h_0 = \frac{a V_0}{g} \frac{2L}{a \gamma}$$

$$h - h_0 = \frac{V_0 2L}{g \gamma}$$

$$\Delta h_{max} = \frac{V_0 2L}{g \gamma}$$

MASSIMO SURCARICO
 PER $\gamma \geq \frac{2L}{a}$
 mammine lente



CHIUSURA TRA LA IV E VIII FASE

$$\frac{2L}{a}$$

$$\gamma$$